ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ

присвячена 145-річчю
з дня народження Ганса Гана

23 - 27 ВЕРЕСНЯ 2024 РОКУ

Зміст

Дія алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ на симетричні многочлени

Леонід Бедратюк
Хмельницький університет, Хмельницький, Україна

Нехай $\mathcal{P}_n$ – множина всіх розбиттів довжини не більше n. Розбиття $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ є впорядкований за спаданням набір невід'ємних цілих чисел.

Многочлен Шура $\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})$, що відповідає розбиттю $\lambda \in \mathcal{P}_n$ є многочленом від змінних $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ який визначається наступним чином (див. [1],[2]):

$$\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i+n-i})}{\det(x_j^{n-i})} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_1+n-2} & x_2^{\lambda_1+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_n^{\lambda_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}.$$

Многочлени Шура породжують кільце симетричних многочленів від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пряма перевірка показує що диференціальні оператори

$$\begin{aligned} D_+ &= x_1^2\partial_1 + x_2^2\partial_2 + \dots + x_n^2\partial_n, \\ D &= 2(x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \dots + x_n\partial_n), \\ D_- &= -(\partial_1 + \partial_2 + \dots + \partial_n), \end{aligned}$$

визначають дію комплексної алгебри $\mathfrak{sl}_2$ у кільці многочленів від n змінних.

Наступне твердження визначає звуження цієї дії на підкільце симетричних многочленів.

Теорема. *Справедливі співвідношення:*

$$\begin{array}{ll} (i) & D_-(\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})) = -\sum\limits_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{P}_n} (n + c(\square))\boldsymbol{s}_\mu(\boldsymbol{x}), \\ (ii) & D(\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})) = 2|\lambda|\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}), \\ (iii) & D_+(\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})) = \sum\limits_{\mu=\lambda+\square\in\mathcal{P}_n} c(\square)\boldsymbol{s}_\mu(\boldsymbol{x}). \end{array}$$

Сумування відбувається за всіма діаграмами Юнга, які отримуються з розбиття λ шляхом додавання, або, відповідно, вилучення клітинки $\square = (i, j)$. Тут i і j є координатами клітинки, тобто номерами рядка і стовпчика в якому знаходиться $\square$, а $c(\square)$ позначає контент цієї клітинки: $c(\square) = j - i$.

1. R. Stanley. Enumerative Combinatorics. Volume 2. Cambridge University Press. 2001.
2. I. G. Macdonald. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Second Edition, Oxford University Press. 1995.

e-mail: LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua

Усереднення в узагальнених системах із повільними і швидкими змінами

Ярослав Бігун, Роман Петришин, Ігор Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

На відміну від систем рівнянь стандартного вигляду із повільними і швидкими змінними [1]

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= X(\tau, a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

розглядається система рівнянь із запізненням вигляду

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon^{\kappa_1} X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\kappa} + \varepsilon^{\kappa_2} Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \end{aligned} \tag{2}$$

де $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$, $\kappa > 0$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \geq 0$, $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, D – обмежена опукла область, $\varphi \in \mathbb{R}^m$; $a_\Lambda(\tau) = \Big(a(\lambda_1\tau), \ldots, a(\lambda_p\tau)\Big)$, $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_p \leq 1$, $\varphi_\Theta(\tau) = \Big(\varphi(\theta_1\tau), \ldots, \varphi(\theta_q\tau)\Big)$, $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q \leq 1$.

Дослідження системи рівнянь (2) ускладнюється внаслідок резонансів, умова яких у точці τ

$$\sum_{\nu=1}^{q} \big(k_\nu, \theta_\nu \omega(\theta_\nu\tau)\big) = 0,$$

де $k_\nu \in \mathbb{Z}^m$, $\|k_1\| + \cdots + \|k_q\| \neq 0$.

Відповідна (2) усереднена за швидкими змінними $\varphi_{\theta_\nu}, \nu = \overline{1, q}$, система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{a}}{d\tau} &= \varepsilon^{\kappa_1} X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \\ \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\kappa} + \varepsilon^{\kappa_2} Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$F_0(\tau, a_\Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{mq}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\varphi_\Theta, \quad F = (X, Y), \quad F_0 = (X_0, Y_0).$$

У повідомленні знайдено достатні умови існування єдиного диференційовного розв'язку системи рівнянь (2) із початковими умовами в точці $\tau = 0$, які збігаються з початковими умовами розв'язку усередненої системи рівнянь.

Ґрунтуючись на встановленій оцінці відповідного системі (2) осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau, s, \overline{s}, \varepsilon) = \int_t^{t+\tau} f(s, \varepsilon) \exp\Big(\frac{i}{\varepsilon^\kappa} \int_{\overline{s}}^{s} \gamma_k(z) dz\Big) ds, \tag{4}$$

для $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, одержано оцінку

$$\varepsilon^{\kappa_2} \|a(\tau, \varepsilon) - \overline{a}(\tau)\| + \varepsilon^{\kappa_1} \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\alpha + \kappa_1 + \kappa_2}, \tag{5}$$

де $\alpha = \kappa/(mq)$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε.

Отриманий результат проілюстровано на модельному прикладі одночастотної системи

$$\frac{da}{d\tau} = \sqrt[3]{\varepsilon}\big(b_1 + b_2\cos(k\varphi + l\varphi_\theta)\big),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d_1 + 2d_2\tau}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де $b_\nu, d_\nu \in \mathbb{R}$, $b_2 \neq 0$, $d_1, d_2 \neq 0$; $\theta \in (0,1)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k + l\theta = 0$; $a(0,\varepsilon) = \overline{y}$, $\varphi(0,\varepsilon) = 0$.

Резонанс у системі досягається при $\tau = 0$. На відрізку $[0, 1/\sqrt[3]{\varepsilon}]$ виконується оцінка

$$|a(\tau,\varepsilon) - \overline{a}(\tau)| \leq |b_3|e^{b_1}\varepsilon^{7/12} + O(\varepsilon^{13/12}) = O(\varepsilon^{7/12}),$$

що відповідає оцінці (5).

Література

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наук. думка, 2004. 474 с.

[2] Бігун Я.Й. Існування розв‘язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом. Нелінійні коливання, 2008. Т. 11, № 4. С. 462– 471.

Крайова задача для коливних систем з імпульсною дією

Ярослав Бігун, Роман Петришин, Олег Українець

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Розглядається багаточастотна система з імпульсною дією у фіксовані моменти часу і параметрами:

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau,\mu); \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\mu), \tag{1}$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon f(x,\varphi,\tau_j,\mu), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon g(x,\varphi,\tau_j,\mu), \tag{2}$$

в якій $\tau_1 \in (0, 2\pi\varepsilon]$, $\tau_{j+1} - \tau_j = 2\pi\varepsilon$, $j \geq 1$, $\tau \in [0; L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in G \subset \mathbb{R}^s$, D і G – обмежені області, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_s)$ – невідомі параметри.

Задамо для системи рівнянь (1), (2) багатоточкові й інтегральні умови

$$F(x|_{\tau=t_1}, ..., x|_{\tau=t_r}, \mu) = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^L [A(\tau,\varepsilon)\varphi + c(x,\varphi,\tau,\mu)]d\tau = 0, \tag{4}$$

де $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_r \leq L$, $r \geq 1$, F – $(n+s)$-вимірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – $(m \times n)$-матриця, a, b, c, f, g, F належать певним класам гладких і 2π-періодичних по $\varphi_\nu, \nu = \overline{1,m}$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ функцій.

Вважатимемо, що $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), ..., \omega_m(\tau)) \in C_{[o,m]}$ і

$$\det\Big(\frac{d^k}{d\tau^k}\omega_\nu(\tau)\Big)_{k,\nu=1}^m \neq 0, \tau \in [o, L]. \tag{5}$$

Розв'язати задачу (1) – (4) означає знайти такий розв'язок $(x(\tau, \varphi(\tau))$ системи (1), (2) і значення параметра $\mu \in G$, які задовольняють умови (3), (4). Для цього побудуємо усереднену задачу

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{a}(\overline{x},\tau,\overline{\mu}) + \frac{1}{2\pi}\overline{f}(\overline{x},\tau,\overline{\mu}), \tag{6}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{b}(\overline{x},\tau,\overline{\mu}) + \frac{1}{2\pi}\overline{g}(\overline{x},\tau,\overline{\mu}), \tag{7}$$

$$F(\overline{x}|_{\tau=t_1}, ..., \overline{x}|_{\tau=t_r}, \overline{\mu}) = 0, \tag{8}$$

$$\int_0^L [A(\tau,\varepsilon)\overline{\varphi} + \overline{c}(\overline{x},\tau,\overline{\mu})]d\tau = 0, \tag{9}$$

де $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{f}, \overline{g}$ позначають середні по φ в кубі періодів відповідних функцій. Зазначимо, що задача (6)–(9) простіша від задачі (1)–(4) в першу чергу тим, що усереднена система (6),(7) на відміну від (1),(2) не підлягає імпульсному впливу. Також, якщо знайдено розв'язок $(\overline{x}(\tau), \overline{\mu})$ задачі (6),(8), то легко переконатися, що для знаходження розв'язку $\overline{\varphi}(\tau)$ задачі (7), (9) досить припустити, що

$$\det\int_0^L A(\tau,\varepsilon)d\tau \neq 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Зазначимо, що обмеження (5) дає можливість встановити ефективні оцінки осциляційних інтегралів і сум [1], які істотно використовуються при обґрунтуванні методу усереднення для системи рівнянь (1),(2).

У даному повідомленні знайдено достатні умови існування єдиного розв'язку $(x(\tau, \varphi(\tau), \mu)$ задачі (1)–(4) у малому околі розв'язку $(\overline{x}(\tau), \overline{\mu})$ усередненої задачі (6)–(9) і одержано оцінку

$$||x(\tau) - \overline{x}(\tau)|| + ||\varphi(\tau) - \overline{\varphi}(\tau)|| + ||\mu - \overline{\mu}|| \leq K\varepsilon^{\alpha}, \tau \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де K і $\alpha \leq (m+1)^{-1}$ – деякі додатні сталі, а під нормою вектора розуміємо евклідову норму.

Література

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наук. думка, 2004. 474 с.

Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями експоненціального типу

Марія Білозерова, Ольга Чепок

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Україна
Державний заклад "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського", Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \exp\left(R_0(y, y') + \exp\left(R_1(y, y')\right)\right), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[\ (-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $R_k : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[\ (k \in \{0, 1\})$ є неперервно диференційовними функціями, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} або проміжок $[y_i^0, Y_i[$[1] або $]Y_i, y_i^0]$. Також припускаєтьбся, що функції R_k задовольняють умови

$$\lim_{\substack{(y_0, y_1) \to (Y_0, Y_1) \\ (y_0, y_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}}} R_k(y_0, y_1) = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{y_i \to Y_i \\ y_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{y_i \dfrac{\partial R_k(y_0, y_1)}{\partial y_i}}{R_k(y_0, y_1)} = \gamma_{ki}, \text{ рівномірно за } y_j \neq y_i \quad (k, i, j \in \{0, 1\}).$$

З вищезазначених умов випливає, що функції $R_k \quad (k \in \{0, 1\})$ є у деякому сенсі близькими до правильно змінних функцій [1]. Прикладами таких функцій можуть слугувати $|y_0|^{\gamma_{k0}} |y_1|^{\gamma_{k1}} \exp(\ln^\mu |y_0 y_1|)$, $|y_0|^{\gamma_{k0}} |y_1|^{\gamma_{k1}} \ln^\mu |y_0 y_1| \ln\ln |y_0 y_1|$ та багато інших. Отже, клас диференціальних рівнянь (1) охоплює достатньо широкий клас істотно нелінійних рівнянь з нелінійностями експоненціального типу. Частинні випадки таких рівнянь застосовуються (див., наприклад, [2]) при дослідженні еліптичних рівнянь, які, в свою чергу, використовуються для моделювання процесів різноманітної природи. Частинний випадок рівняння (1) досліджувався у роботі [3].

Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називають $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, якщо

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} = \lambda_0.$$

Отримано асимптотичні зображення при прямуванні аргументу до особливої точки для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1), а також для похідних першого порядку цих розв'язків для випадків $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. Крім того, отримано необхідні та достатні умови існування таких розв'язків у рінянь виду (1).

Введемо позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{as } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{as } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \Phi_0(y) = \int_{Y_0}^{y} exp(-R_0(\tau, y'(t(\tau))) - exp(R_1(\tau, y'(t(\tau))))) d\tau,$$

де $t(y)$ є оберненою функцією для $y(t)$,

$$\Phi_1(y) = \int_{Y_0}^{y} \frac{\Phi_0(\tau)}{\tau} d\tau, \quad Z_1 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y),$$

[1] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$.

$$I(t)=\alpha_0(\lambda_0-1)\int\limits_{B_\omega^0}^{t}\pi_\omega(\tau)p(\tau)d\tau,\quad B_\omega^0=\begin{cases} a, & \text{as } \int\limits_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)d\tau=+\infty,\\ \\ \omega, & \text{as } \int\limits_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)d\tau<+\infty,\end{cases}$$

$$I_1(t)=\int\limits_{B_\omega^1}^{t}\frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(\tau)}d\tau,\quad B_\omega^1=\begin{cases} a, & \text{as } \int\limits_a^\omega \frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(\tau)}d\tau=+\infty,\\ \\ \omega, & \text{as } \int\limits_a^\omega \frac{\lambda_0 |I(\tau)|}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(\tau)}d\tau\ <+\infty.\end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема Умови

$$\pi_\omega(t)y_1^0y_0^0\lambda_0(\lambda_0-1)>0;\quad \pi_\omega(t)y_1^0\alpha_0(\lambda_0-1)>0\quad \text{as } t\in[a;\omega[,$$

$$y_1^0\cdot\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\ =Y_1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}I_1(t)=Z_1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{I(t)}{\Phi_0(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}=1$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)\Phi_1^{-1}(I_1(t))}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}=\infty.$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I'(t)\pi_\omega(t)\Phi_0\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)}{\Phi_0'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)\Phi_1^{-1}(I_1(t))I(t)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$

є необхідним та достатніми для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язків у випадках $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

Більше того, кожен такий розв'язок задовольняє при $t\uparrow\omega$ наступні асимптотичні зображення

$$y(t)=\Phi_1^{-1}(I_1(t))[1+o(1)],\quad y'(t)=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)}\cdot\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{2}$$

Література

[1] Seneta E. Regularly varying functions, Lecture Notes in Math., vol. 508, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[2] Feckan M.; Marynets K. *Study of Differential Equations with Exponential Nonlinearities via the Lower and Upper Solutions' Method*, Numer. Anal. Appl. Math., 2020, 1(2), 1-7.

[3] Bilozerova M.O. *Asymptotic behavior of solutions to second order with nonlinearities, that are compositions of exponential and regularly varying functions*, Bukovinian Math. Journal. 2023, 11, 2, pp. 33-40

e-mail: Marbel@ukr.net, olachepok@ukr.net

Регуляризовані сліди сингулярних диференціальних операторів

Дмитро Бобилєв

Криворізький державний педагогічний університет, Україна

Розглянемо в $L_2[0,+\infty)$ самоспряжений напівобмежений знизу оператор $\mathbf{L}$ з дискретним спектром, який заданий виразом:

$$l(y) \equiv (-1)^m y^{(2m)}(x) + P_{2m-2}(x) y^{(2m-2)} + \ldots + P_0(x) y(x)$$

та крайовими умовами

$$B_l(y) \equiv \sum_{s=1}^{2m} a_{ls} y^{(s-1)}(0) = 0, \quad l = \overline{1,m}.$$

Коефіцієнти $P_{2(m-k)}(x), \quad k = \overline{2,m}$ є дійсними, локально обмеженими функціями на додатній півосі, а $P_{2m-2}(x)$ – кусково-гладка функція. Коефіцієнти $a_{ls} \in \mathbb{C}, \quad l = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,2m}$ крайові умови які забезпечують самоспряжене розширення $\mathbf{L}$ мінімального симетричного оператора, породженого операцією $l(y)$. Нумеруємо в порядку неспадання власні значення $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$ оператора $\mathbf{L}$. Нехай $\mathbf{P}$ – оператор добутку на дійснозначну, вимірну, обмежену і фінітну функцію $q(x)$. Оператор $\mathbf{L}+\mathbf{P}$ залишається самоспряженим напівобмеженим з дискретним спектром $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \leq \ldots$

Теорема. *Нехай* $\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x q(t)dt \in \mathrm{Var}[0,\delta], \delta > 0$. *Тоді*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi}\int_0^{+\infty} q(t)dt\right] = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty} q(x)\left(\Theta_m(x,x,\mu) - \frac{1}{\pi}\mu^{\frac{1}{2m}}\right)dx,$$

де $c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2m}}, c_k = \lambda_k^{\frac{1}{2m}} - \lambda_{k-1}^{\frac{1}{2m}}, k = 2,3,\ldots$ *і* $\Theta_m(x,y,\mu)$ *– спектральна функція оператора*

$$\mathbf{L}_m := \begin{cases} (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \\ B_l(y) = 0, \quad l = \overline{1,m}, \end{cases}$$

який діє в просторі $L_2[0,+\infty)$.

e-mail: dmytrobobyliev@gmail.com

Асимптотичне розв'язання задачі оптимального керування для рівняння з похідною Хукухари зі швидкоколивними коефіцієнтами

Кирило Бондаренко, Ольга Кічмаренко

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна

Пропонується застосування методу усереднення для розв'язання задачі оптимального керування нелінійною керованою системою, яка описується диференціальним рівнянням з похідною Хукухари з малим параметром, що узагальнює результати роботи [3] на випадок диффеpенціальних рівннянь з множиннозначною правою частиною.

Розглянемо нелінійну задачу оптимального керування зі швидкоколивними змінними:

$$D_h\chi = F\left(\frac{t}{\varepsilon}, \chi, u(t)\right), \quad \chi(0, u(0)) = \chi_0, \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $T > 0$ — задана стала, $\chi_0 \in conv(\mathbf{R}^n)$ $\chi : [t_0, T] \to conv(\mathbf{R}^n)$, $F : [t_0, T] \times conv(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^m \to conv(\mathbf{R}^n)$, $\chi_0 \in conv(\mathbf{R}^n)$, $u(t)$ — вектор керування, $u : [t_0, T] \to \mathbf{R}^m$, $u(t) \in U \subset comp(\mathbf{R}^n)$, з критерієм якості

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int_0^T L\left(t,\ \chi_\varepsilon\left(t\right),\ u\left(t\right)\right) dt + \Phi(\chi_\varepsilon\left(T\right)) \longrightarrow \infty. \tag{2}$$

Позначимо через $\chi(t, u)$ — розв'язок задачі (1), який відповідає керуванню $u(t)$. Поставимо у відповідність усереднену задачу оптимального керування

$$D_h\eta = F_0\left(\eta,\ u\left(t\right)\right),\ \eta\left(0,\ u\left(0\right)\right) = \chi_0 \tag{3}$$

з критеріями якості

$$J_0\left[u\right] = \int_0^T L(t,\ \eta\left(t\right),\ u\left(t\right))dt + \Phi(\eta\left(T\right)) \to \inf, \tag{4}$$

де

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\ \int_0^s F(t,\ \chi,\ u)dt = F_0(\chi,\ u), \tag{5}$$

тут інтеграл від множиннохначного відображення розуміємо в сенсі Хукухари-Рімана [1, 2], а збіжність в сенсі метрики Хаусдорфа:

$$\lim_{s\to\infty} h\left(F_0(\chi,\ u), \frac{1}{s}\ \int_0^s F(t,\ \chi,\ u)dt\right) = 0. \tag{6}$$

Сфорлулюємо умови, які будуть використовуватися для доведення основних результатів.

Умова 1. *Допустимим керуванням є m-вимірні вектор-функції $u(\cdot)$ такі, що $u(\cdot) \in U$, де u — компактна множина в $L_2([0,\ T])$.*

Умова 2. *Функція $F(t,\ \chi,\ u)$ визначена і неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_0 = \{t \geq 0,\ \chi \in R^\alpha,\ u \in U\}$, і:*

1) $F(t,\ \chi,\ u)$ задовольняє в Q умову лінійного росту зі сталою M, тобто

$$|F(t,\ \chi,\ u)| \leq M(1 + |\chi|)$$

для будь-яких $(t,\ \chi,\ u) \in Q_0$;

2) $F(t,\ \chi,\ u)$ задовольняє в Q_0 умову Ліпшиця за $\chi \in R^d$ і $u \in R^m$ зі сталою λ, тобто

$$h\left(F\left(t,\ \chi,\ u\right), F(t, \chi_1,\ u_1)\right) \leq \lambda(h\left(\chi, \chi_1\right) + |u - u_1|)$$

для довільних $(t,\ \chi,\ u)$ і $(t,\ \chi_1,\ u_1)$ в Q_0.

Модуль від множиннозначного відображення розуміємо в сенсі метрики Хаусдорфа

Умова 3. *Рівномірно відносно $\chi \in R^d$ і $u \in R^m$ існує границя (6).*

Умова 4. *Функція $L(t,\ \chi,\ u)$ визначена і неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_1 = \left\{t \in [0,\ T],\ \chi \in R^d,\ u \in R^m\right\}$, причому*

1) $L(t,\ \chi,\ u)$ рівномірно відносно $t \in [0,\ T]$ і $u \in R^m$ неперервна за $\chi \in R^d$;

2) $L(t,\ \chi,\ u)$ задовольняє за змінною u в області Q_1 умову Ліпшиця з константою $\lambda > 0$;

3) функція $\Phi : R^d \to R$ неперервна за χ.

Головний результат роботи сформульовано у наступних теоремах

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 3.1–3.4. Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, \chi_0)$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для $\chi(t, u)$ і $\eta(t, u)$ розв'язків задач (1) і (3) відповідно справедлива оцінка*

$$h(\chi\left(t,\ u\right), \eta(t,\ u)) < \eta \tag{7}$$

для всіх $t \in [0,\ T]$ і всіх допустимих керувань $u(t)$.

Теорема 2. *Нехай виконані умови 3.1, 3.4.Тоді задачі (1),(2) і (3),(4) мають розв'язки $(\chi_\varepsilon^*\left(t\right), u_\varepsilon^*\left(t\right))$, $(\eta^*\left(t\right), u_*(t))$ відповідно. При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для довільного $\xi > 0$ існує ε_0 таке, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| < \xi, \tag{8}$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$, така що

$$\chi_{\varepsilon_n}^*(t) \to \eta^*(t) \tag{9}$$

рівномірно на $[0,\ T]$, а

$$u_{\varepsilon_n}^*(t) \to u^*(t) \tag{10}$$

в $L_2([0,\ T])$.

Якщо при цьому усереднена задача (3),(4) має єдиний розв'язок, то збіжності (9) і (10) мають місце при всіх $\varepsilon \to 0$.

Отже, доведено збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій точних задач (1)–(2) до оптимального керування і траєкторій усередненої задачі (3)–(4). При цьому оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальне для точної, тобто з точністю до малого параметра ε реалізується мінімум критерія якості.

Література

[1] Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj., 1967, №. 10. — P. 205–223.

[2] F. S. de Blasi, F. Iervolino,Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat. Ital., 1969, Vol. 2, № 4–5, P. 491–501 .

[3] Кічмаренко О. Д. Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі // Укр. мат. журн., 2018, т. 70, № 5. — С.642–654.

Тополого-метричні властивості множин, визначених у термінах зображення чисел рядами Кантора, що пов'язані з послідовністю Фібоначчі

Ольга Бондаренко, Микола Працьовитий
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна

У доповіді розглядається геометрія канторівської системи числення, породженої послідовністю основ (s_n), де $s_n = 2^{\varphi_n}$, (φ_n) — класична послідовність Фібоначчі: $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Розглядаються множини канторівського типу з нульовою й додатною мірою Лебега, зокрема аномально фрактальні.

Нехай $A_n = \{0, 1, ..., 2^{\varphi_n} - 1\}, W = A_1 \times A_2 \times ...$

Лема 1. *Для будь-якого числа $x \in [0; 1]$ $\exists$ $(\alpha_n) \in W$ така, що*

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + ... + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 ... s_n} + ... \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}.$$

Останній символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}$ називається Δ-*зображенням числа* x, α_n — його *n-ою цифрою.*

Теорема 3. *Множина*

$$C \equiv C[\triangle; \bar{1}] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 ... c_n ...}, c_n \neq 1\}$$

є ніде не щільною, досконалою множиною додатної міри Лебега, яка обчислюється за формолою

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{\varphi_n}}\right) > 0. \tag{1}$$

Теорема 4. *Міра Лебега множини*

$$C \equiv C[\triangle; V_n] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 ... c_n ...}, c_n \in V_n \subset A_n\} \tag{2}$$

обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}}). \tag{3}$$

Наслідок 1. Множина C, означена рівністю (2), є нуль-множиною Лебега тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}} = \infty.$$

Наслідок 2. Якщо $A_n \setminus V_n = \{c_n\}$, то $C[\Delta, V]$ є множиною додатної міри Лебега.

Теорема 5. *Множина*

$$C_1 \equiv C[\triangle; V_n] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 ... c_n ...}, c_n \in V_n = \{0, 2^{\varphi_n} - 1\}\}.$$

є досконалою аномально фрактальною множиною [1], тобто має нульову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Теорема 6. *Нехай* $g_{0n} > 0,\ g_{[2^{\varphi_n}-1]n} > 0,\ g_{0n} + g_{[2^{\varphi_n}-1]n} = 1,\ \beta_{0n} = 0,\ \beta_{jn} = g_{0n}$ *при* $0 < j < 2^{\varphi_n}$ *функція* f, *означена рівністю*

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j},$$

є сингулярною функцією розподілу канторівського типу [1] з аномально фрактальним спектром.

Теорема 7. *Якщо* $g_{c_n n} = 0, g_{jn} = \frac{1}{2^{\varphi_n}-1}$ *при* $j \neq c_n$ *і* $\beta_{jn} = g_{0n} + ... + g_{[j-1]n}$, *то функція* f, *означена рівністю*

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j},$$

є функцією розподілу квазіканторівського типу [1].

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[2] *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язвана з двійковим рядом і послідовність Фібоначчі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т.14, № 4. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С.178–187.

[3] *Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Працьовитий М.В.* Канторівська двійково-фібоначчієвасистема числення у задачах теорії функцій// Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. – Т. 16, № 3. – С. 173 –185.

e-mail: o.i.bondarenko@udu.edu.ua, prats444@gmail.com

Задача Діріхле в півпросторі для рівняння Колмогорова

Іван Буртняк, Ганна Малицька
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна

Ми досліджуємо існування і єдиність класичного розв'язку першої мішаної крайової задачі в півпросторі для виродженого параболічного рівняння другого порядку, яке має виродження параболічності по трьох групах змінних, при цьому ми використовуємо метод потенціалів, розв'язність поставленої задачі еквівалентна розв'язності відповідного сингулярного інтегрального рівняння, яке є стискуючим відображенням при малих t в класах експоненціальних спадних функцій.

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$, $n_0 = \sum_{j=1}^{4} n_j$, $n_j \in N$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_j \in R^{n_j}$, $j = \overline{1,4}$, $x_j = (x_{j1}, ..., x_{jn_j})$, $x' = (x'_1, x_2, x_3, x_4)$, $x'_1 = (0, x_{12}, ..., x_{jn_j})$, $\Pi_{(0,T]} = \{(t, x) : x \in R^{n_0}, 0 < t \leq T < +\infty\}$.

Задача Коші має вигляд:

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{n_{j+1}} x_{j\mu} \partial_{x_{j+1\ \mu}} u(t,x) - \sum_{k=1}^{n_1} \partial^2_{x_k^2} u\,(x,t) = f(t,x), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}; \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), x \in R^{n_0}; \tag{2}$$

$$u(t,0,x') = \varphi(t,x'), x' \in R^{n_0-1}, t > 0; \tag{3}$$

$$u(0,0,x') = \varphi(0,x'), x' \in R^{n_0-1}, \tag{4}$$

Якщо $f(t,x), u_0(x), \varphi(t,x')$ абсолютно інтегровні разом із похідними по x_{21}, x_{31}, x_{41} до четверто порядку включно то задача (1)-(4) має єдиний класичний розв'язок та

1) $f(t,x)$ задовольняє умову Гельдера по x рівномірно відносно t, з показником $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

2) $f(t,x), u_0(x), \varphi(t,x')$ є неперервні в $\Pi_{(0,T]}$.

Література

[1] Malytska A. P. *Construction of the fundamental solutions of certain higher-order ultraparabolic equations.* Ukr. Mat. Zh.1985,**37**(6), 713–718.

Системи числення з основою s і $(m+1)$-ою цифрою

Наталія Василенко, Юлія Вовк, Микола Працьовитий

ЧОІППО імені К.Д. Ушинського, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, ..., m\}$ – алфавіт; $L = A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Розглядається числова множина

$$E = \{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k}\alpha_k \equiv \Delta^{m_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},\ (\alpha_n) \in L\}.$$

Символічний запис $x = \Delta^{m_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ називається *m_s-зображенням* числа.

Приклад 1. При $m = s - 1$ маємо класичну s-кову систему числення, при цьому $\Delta^{m_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ є s-ковим зображення чисел відрізка $[0; 1]$, тобто $E = [0; 1]$.

Лема 1. *Якщо $m < s - 1$, то множина E є ніде не щільною, самоподібною множиною з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича $\log_s m$. Якщо $m > s - 1$, то $E = [0; \frac{m}{s-1}]$.*

Циліндром рангу k з основою $c_1c_2...c_k$ називається множина

$$\Delta^{m_s}_{c_1c_2...c_k} = \{x : x = \Delta^{m_s}_{c_1c_2...c_k\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},\ \alpha_n \in A\}.$$

У доповіді будуть висвітлені:

1) властивості циліндричних множин (відрізків, що містять циліндр), враховуючи специфіку їх перекриттів;

2) кількість m_s-зображень точок множини E;

3) умови, що накладаються на s і m, при яких перетин двох циліндрів є циліндром деякого рангу;

4) тополого-метричні і фрактальні властивості множин $C[m_s, V_n] = \{x : x = \Delta^{m_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},$ де $\alpha_n \in V_n \subset A\}$ та інших множин з обмеженнями на вживання цифр;

5) зв'язок множин $C[m_s, V_m]$ з множинами неповних сум числових рядів тощо.

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.

e-mail: vasylenkonm@gmail.com, freeeidea@ukr.net, prats4444@gmail.com

Функція типу Серпінського, пов'язана з рядами Кантора

Наталія Василенко, Надія Черчук
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Більшість у топологічному сенсі функцій з метричного простору $C_{[0;1]}$ є ніде не монотонними та не диференційовними. Яскравим прикладом є функція Серпінського [1], для задання якої використовується трійкове та п'ятіркове зображення дійсних чисел. Різні системи зображення чисел та перетворювачі символів одного зображення у інше [3] дозволяють розширити класи таких функцій та вивчати їх властивості [2,4].

Основним об'єктом розгляду є функція типу Серпінського аргумент якої представлений у канторівській системі числення з послідовністю основ (s_k), $(s_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{N})$, а значення функції визначається залежністю цифр Q_3—зображення числа від цифр зображенння аргументу.

Нехай $A_{s_k} \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$ — послідовність алфавітів. Визначимо на A_{s_k} дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha \in A_k \setminus \{0, s_k - 1\}, \\ 2, \text{ якщо } \alpha = s_k - 1. \end{cases}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_{s_k}^{\infty} = A_1 \times ... \times A_k \times ...$ визначимо послідовність (c_k):

$$c_1 = c_2 = 0, c_k = \begin{cases} c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} \neq \dfrac{s_{k-1} - 1}{2}, \\ 1 - c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} = \dfrac{s_{k-1} - 1}{2}. \end{cases}$$

Розглядається сім'я неперервних ніде не диференційовних на відрізку $[0; 1]$ функцій, аргумент якої подається канторівським зображення дійсних чисел з послідовністю основ (s_k):

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...}, \ A_{s_k} \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\},$$

а значення функції має наступний Q_3-розклад

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1 \beta_2 ... \beta_k ...}, \ \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), \text{ якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), \text{ якщо } c_k \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Функція g є неперервною ніде не монотонною на відрізку $[0; 1]$ функцією, приріст якої на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{d_1 d_2 ... d_m}$ рангу m визначається за формулою $\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{d_1 d_2 ... d_m}) = (-1)^{c_m} \prod\limits_{i=1}^{m} g_{d_i}$ та недиференційовною в кожній точці відрізку $[0; 1]$.*

Теорема 2. *1) Якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{d_1 d_2 ... d_k ...}$, де $d_k \in A_3 \backslash \{1\}, k \in \mathbb{N}$, то множина $g^{-1}(y_0) = \{x : g(x) = y_0\}$ рівня y_0 містить єдину точку $x = \Delta^{(s_k)}_{m_1 m_2 ... m_k ...}$, (s_k) — цифри зображення якої визначаються за формулою:*

$$m_k = \begin{cases} 0, \textit{ якщо } d_k = 0, \\ s_k - 1, \textit{ якщо } d_k = s_k - 1. \end{cases}$$

2) Якщо Q_3—зображення точки y_0 містить скінченну кількість цифр "1", які розташовані на місцях $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_m}$, то множина $g^{-1}(y_0)$ є скінченною і містить $N = (2k_{n_1}-1)\cdot\ldots\cdot(2k_{n_m}-1)$ точок. Зокрема, якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{m}}d_{m+1}d_{m+2}\ldots$, де $d_{m+j} \in A_3\backslash\{1\}, j \in \mathbb{N}$, то множина $g^{-1}(y_0)$ є скінченною і містить $N = (2m-1)!!$ точок.

3) Якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{d_1d_2\ldots d_k\ldots}$, де

$$\begin{cases} d_{k_n}(y_0) = 1, \ n \in \mathbb{N} \\ d_j(y_0) \neq 1, \ j \notin \{k_n\}, \end{cases}$$

то множина $g^{-1}(y_0)$ є континуальною.

Література

[1] *Sierpinski W.* Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej // Wektor. – 1914. – № 8. – P. 337-343.

[2] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. J. of Math. Anal. – 2013. – **7**(64). – P. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[3] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[4] *Працьовитий М. В., Черчук Н. В., Вовк Ю. Ю., Шевченко А. В.* Ніде не монотонні функції, пов'язані з зображеннями чисел рядами Кантора. Збірник праць Ін–ту математики НАН України, 2019, Том 16, № 3. — С. 232–243.

e-mail: vasylenkonnn@gmail.com, nadiacercuk@gmail.com

Періоди алгебраїчних многовидів

Марія Власенко
Київська школа економіки, Київ, Україна

Періоди це комплексні числа, які виникають як значення інтегралів алгебраїчних диференціальних форм по топологічним циклам. Це поняття, введене Александром Ґротендіком у 1960х, стало однією з центральних тем у арифметичній геометрії. Множина періодів є зліченною і включає в себе алгебраїчні числа. Ми оглянемо теорію періодів з елементарної точки зору, яка була сформульована Заґіром та Концевічем у 2000х. Також згадаємо узагальнення групи Ґалуа на такі числа і сформулюємо гіпотезу Ґротендіка.

e-mail: masha.vlasenko@gmail.com

Асимптотична поведінка швидко змінних рішень диференціального рівняння з нелінійністю, що швидко змінюється

Сергій Голубєв

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається двочленне неавтономне диференціальне рівняння четвертого порядку виду

$$y^{(4)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y) \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ -неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційована функція така, що $\varphi'(y) \neq 0$ де $y \in \Delta_{Y_0}$, $\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{якщо} & 0, \\ \text{якщо} & +\infty, \end{cases}$

$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1$, Y_0 дорівнює 0 або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} - односторонній окіл Y_0. Відповідно до цих умов, функція φ та її перша похідна першого порядку є швидко змінними функціями при $y \to Y_0$. Для диференціальних рівнянь другого і третього порядку з правою частиною такою самою, як і в (1), асимптотичну поведінку розв'язків досліджували в роботах Евтухова В.М., Шарай Н.В., Чернікової А.Г., Харькова В.М. [1-5]. У даному дослідженні встановлюються асимптотичні властивості розв'язків, які досліджувалися раніше під час розгляду диференціальних рівнянь з нелінійностями, що правильно змінюються, а саме так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків.
Визначення.
Розв'язоком y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на відрізку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступним умовам $y(t) \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [t_0, \omega[$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0 \lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \left[\begin{array}{ll} \text{якщо} & 0, \\ \text{якщо} & \pm\infty, \end{array}\right.$ $(k = 1, 2, 3)$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(3)}(t)]^2}{y^{(2)}(t) y^{(4)}(t)} = \lambda_0$. В даній роботі досліджується випадок, коли $\lambda_0 = 1$ (особливий випадок). Для цього уведемо наступні допоміжні позначення

$J_0(t) = \int\limits_{A_0}^{t} p_0^{\frac{1}{4}}(\tau)$, $q(t) = \frac{(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)))'}{\alpha_0 J_3(t)}$, $H(t) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)))}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)))}$,

$J_1(t) = \int\limits_{A_1}^{t} p_0(\tau)\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(\tau)))\, d\tau$, $J_2(t) = \int\limits_{A_2}^{t} J_1(\tau)\, d\tau$, $J_3(t) = \int\limits_{A_3}^{t} J_2(\tau)\, d\tau$

де границя інтегрування A_i дорівнює або ω або сталій і визначається таким чином, щоб інтеграл прямував або до 0 або до $\pm\infty$. Для рівняння (1) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. *Для існування $P\omega(Y_0, 1)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1) необхідно, щоб виконувалися наступні нерівності*

$$\alpha_0\nu_2 > 0, \quad \alpha_0\mu_0 J_0(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{2}$$

$$\alpha_0\nu_0 < 0 \quad \textit{якщо} \quad Y_0 = 0, \quad \alpha_0\nu_0 > 0 \quad \textit{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{3}$$

і умови

$$\frac{\alpha_0 J_3(t)}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \sim \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \sim \frac{J_2'(t)}{J_2(t)} \sim \frac{J_3'(t)}{J_3(t)} \sim \frac{(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)))'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega \tag{4}$$

$$\alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} J_0(t) = Z_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)))'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty \tag{5}$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні відображення

$$y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) \left[1 + o(1) H^{-1}(t)\right],$$

$$y'(t) = \alpha_0 J_3(t)[1 + o(1)], \quad y''(t) = \alpha_0 J_2(t)[1 + o(1)], \quad y'''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + o(1)] \qquad (6)$$

Крім того, за деяких додаткових обмежень, крім необхідних умов, з'ясовано питання про фактичне існування розв'язків із зазначеними асимптотичними відображеннями з Теореми 1, при цьому використовуються результати роботи Євтухова, Самойленко [6].

Література

[1] **V. M. Evtukhov, N. V. Sharay** Asymptotic behaviour of solutions of third order differential equation with rapidly varying nonlinearities, Mem. Different. Equat. and Math. Phys., 77, 1 – 15 (2019).

[2] **В. М. Евтухов, А. Г. Чернікова** Асимптотична поведінка повільно змінних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі швидко змінною нелінійністю, Нелінійні коливання, 20, № 3, 346 – 360 (2017).

[3] **А.Г. Чернікова** Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійністю, що швидко змінюється, Дослідження в математиці і механіці, 22, № 2 (30), 55 – 70 (2017).

[4] **В. М. Евтухов, А. Г. Чернікова** Про асимптотику розв'язків звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі швидко змінними нелінійностями, Укр. мат. журн., 71, № 1, 73 – 91 (2019).

[5] **В. М. Евтухов, В. М. Харьков** Асимптотичні представлення розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, Диференц. рівняння, 43, № 9, 1311 – 1323 (2007).

[6] **Евтухов В.М., Самойленко А.М** Умови існування розв'язків, що зникають в особливій точці, у дійсних неавтономних систем квазілінійних диференціальних рівнянь// Укр. Мат. Ж. - 2010. - 62, № 1. - С. 52-80.

Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання

Василь Городецький, Руслана Колісник, Наталія Шевчук
Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна

Різні класичні функціональні простори (наприклад, соболєвські, аналітичних функцій, нескінченно диференційовних функцій і розподілів Шварца) можна розуміти як позитивні й негативні простори відносно L_2, побудовані за функціями від оператора диференціювання або множення на незалежну змінну, або як проєктивні та індуктивні границі таких просторів. У роботах Горбачук В.І. та Горбачука М.Л. досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача у півпросторі $t > 0$ для диференціально-операторного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де $A = |D_x|^\alpha$, $D_x = d/dx$, $\alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, ...\}$ – дробовий степінь модуля оператора диференціювання. Даний оператор можна розглядати як аналог оператора дробового диференціювання Вейля, який використовується у теорії періодичних функцій [1]. Досліджувана задача є узагальненням задачі Коші у випадку, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінються умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0, +\infty)$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < +\infty$, $\{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = ... = \mu_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Вказана умова трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \varphi \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію). Така нелокальна за часом задача відноситься до багатоточкових задач для функціонально-операторних рівнянь (огляд праць, присвячених неокальним задачам для диференціально-операторних рівнянь і рівнянь з частинними похідними, див., наприклад, у [2]).

У роботі доведено коректну розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів, наведено аналітичне зображення розв'язку, досліджено поведінку розв'язку $u(t, x)$ при $t \to +\infty$ (стабілізація розв'язку). Встановлено [3], що кожний псевдодиференціальний оператор (у випадку однієї незалежної змінної), побудований за однорідною функцією порядку α, не диференційовною у точці 0, збігається зі звуженням оператора A на деякий локально-опуклий топологічний простір, який є проєктивною границею банахових просторів, неперервно вкладених один у один.

1. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. — Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

2. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною: Монографія. — Чернівці: Видавничий дім „Родовід", 2015. — 400с.

3. В.В. Городецький, Р.С. Колісник, Н.М. Шевчук. Нелокальна за часом задача для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання // Нелінійні коливання. — 2021. — Т.24, № 4.— С. 439–459

e-mail: v.grodetskiy@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua, n.shevchuk@chnu.edu.ua

Про обмежені розв'язки різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами

Михайло Городній

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Нехай X – комплексний банахів простір, $L(X)$ – простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X. Через $\sigma(T)$ позначатимемо спектральний радіус оператора $T \in L(X)$.

Зафіксуємо натуральне число p та оператори $A, B, A_1, A_2, ..., A_p$ з $L(X)$ і розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, \ n \geq p+1, \\ x_{n+1} = A_n x_n + y_n, \ 1 \leq n \leq p, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, \ n \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – шукана послідовність елементів простору X.

Покладемо $A_{jk} = A_k A_{k-1} ... A_j, \ 1 \leq j \leq k \leq p$. Справджується така теорема.

Теорема 4. *[1] Для того щоб різницеве рівняння (1) мало для довільної обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ единий обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:*
$i1)$ $\sigma(A) \cap S = \varnothing, \sigma(B) \cap S = \varnothing$;
$i2)$ $A_{1k}(X_+(B))$ *– підпростір в X, а також оператор A_{1k} біективно відображає $X_+(B)$ на $A_{1k}(X_+(B))$ для кожного $1 \leq k \leq p$;*
$i3)$ *Простір X розкладається в пряму суму $X = X_-(A) \dot{+} A_{1p}(X_+(B))$ своїх підпросторів $X_-(A)$ і $A_{1p}(X_+(B))$.*

Також при виконанні умов теореми 1 отримано явний вигляд відповідного до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиного обмеженого розв'язку $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (1).

Відомо, що для лінійного різницевого рівняння зі змінним операторним коєфіцієнтом умова існування єдиного обмеженого розв'язку виконується тоді і тільки тоді, коли для відповідного однорідного різницевого рівняння виконується умова експоненціальної дихотомії (див., наприклад, [2]). У загальному випадку перевірка умови експоненціальної дихотомії нетривіальна. Теорема 1 містить необхідні і достатні умови, які забезпечують виконання умови експоненціальної дихотомії для різницевого рівняння (1).

Література

[1] *Городній М. Ф.* Обмежені розв'язки різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами. // Нелінійні коливання. – 2023. – Т. 26, №2. – С. 199 – 209.

[2] *Слюсарчук В. Ю.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн.– 1983. – 35, № 1. – С. 109 – 115.

Бігармонічне продовження градієнтів

Сергій Грищук
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Однією з класичних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є задача про продовження розв'язків рівнянь за межі області їх визначення.

При розв'язуванні крайових задач для плоских бігармонічних функцій, зокрема пов'язаних з теорією пружності, часто більш важливим є знаходження не самої шуканої бігармонічної функції, а її градієнта (див., наприклад, [1, 2]).

Нехай $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, D — обмежена однозв'язна область декартової площини площини xOy, ∂D – межа області D, точки $A_1, A_2 \in \partial D$, $A_1 \neq A_2$; гладкі жорданові криві Γ, Γ_1, Γ_2 належать межі ∂D і мають у якості кінців A_1 та A_2, крім того, дані точки не належать жодній із кривих Γ, Γ_1, Γ_2. Тоді ∂D є об'єднанням Γ_1, Γ_2 та A_1, A_2, а крива Γ розбиває множину D на дві обмежені однозв'язні множини D_1 та D_2, де межа ∂D_k області D_k, $k = 1, 2$, є об'єднанням Γ, Γ_k, A_1 та A_2, при цьому D є об'єднанням областей D_1, D_2 та кривої Γ.

Нехай G – обмежена однозв'язна область декартової площини xOy; функція $v\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ має в G неперервні похідні першого порядку $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$. Символом $\mathrm{grad}v$ будемо позначати упорядковану пару $(\partial v/\partial x, \partial v/\partial y)$. Якщо функція v бігармонічна в області G (має в G неперервні похідні до четвертого порядку включно і задовольняє рівняння $\Delta\Delta v = 0$, де Δ — лапласіан дійсної площини), то частинні похідні $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ є також бігармонічними функціями в області G, тому градієнт $\mathrm{grad}v$ будемо називати бігармонічним у цій області.

Предметом даного дослідження є знаходження необхідних та достатніх умов існування неперервного продовження через криву Γ бігармонічних градієнтів $\mathrm{grad}\, u_1$ та $\mathrm{grad}\, u_2$ бігармонічних функцій (в D_1 та D_2 відповідно) так, щоб продовження в область D градієнтів $\mathrm{grad}\, u_1$ та $\mathrm{grad}\, u_2$ визначало бігармонічний градієнт певної бігармонічної функції u в D. Іншими словами, потрібно з'ясувати, коли існує бігармонічна функція $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, звуження градієнта якої на області D_1 та D_2 збігаються відповідно з градієнтами наперед заданих бігармонічних функцій $\mathrm{grad}u_1$ та $\mathrm{grad}u_2$.

Шукані умови продовження знаходяться у термінах граничної поведінки на Γ дійсних компонент для похідних відповідних порядків від аналітичних функцій (а саме: граничної поведенки деяких дійсних компонент аналітичних функцій та граничних значень певних компонент від їх похідних другого порядку), які набувають значення у комутативній двовимірній бігармонічній алгебрі (див., наприклад, [3, 4]), причому певні їх пари дійсних компонент у областях D_k, $k = 1, 2$, збігаються відповідно зі значеннями градієнтів функцій u_k, $k = 1, 2$.

Анонсовані результати детально розглянуто у роботі [5].

Література

[1] Albinus G. Multiple layer potentials for the quadrant and their application to the Dirichlet problem in plane domains with a piecewise smooth boundary. Banach Center Publ. 1983. **10**, No. 1, pp. 7 –26.

[2] Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. *Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem.* Math. Methods Appl. Sci. 2016. **39**, No. 11, pp. 2939–2952.

[3] Grishchuk S. V., Plaksa S.A. *Monogenic functions in a biharmonic algebra*, Ukr. Mat. Zh. **61**, No. 12, 1587–1596 (2009); ***English translation***: Ukr. Math. J. **61**, No. 12, 1865–1876 (2009).

[4] Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. *Basic properties of monogenic functions in a biharmonic planeю.* Complex Analysis and Dynamical Systems V, Contemp. Math. 591, Amer. Math. Soc., Providence (2013), P. 127–134.

[5] Грищук С. В. *Бігармонічне продовження градієнтів за допомогою моногенних функцій зі значеннями у бігармонічній алгебрі.* Укр. мат. журн. **76**, № 4, С. 487–501 (2024).

e-mail: serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua

Еволюційна видимість у мінливих множинах

Ярослав Грушка

Інститут Математики НАН України, Київ, Україна

З інтуїтивної точки зору мінливі множини — це сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (еволюції), тобто — змінювати свої властивості, з'являтись чи зникати, розпадатись на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатись в один. Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження, тобто, залежно від системи відліку. Отже, можна сказати, що мінливі множини ближчі до тих "множин" з якими ми маємо справу в реальній дійсності. Мотивацією для побудови теорії мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики. Коли ми намагаємось заглибитись в сутність об'єктів, які вивчає фізика та деякі інші природничі науки, ми природним чином приходимо до поняття мінливої множини. Проблема математичної формалізації поняття мінливої множини, тобто проблема побудови математичної теорії мінливих множин, в різних формах ставилась в роботах не лише математиків, але й представників інших природничих наук, зокрема Олександра Лєвіча, Міхаеля Бара, Коліна Макларті, Чарльза Велса, Джона Бела. На математично строгому рівні теорія мінливих множин була побудована в [1, 2] та інших роботах автора, присвячених цій тематиці. Найбільш повний і детальний виклад теорії мінливих множин можна знайти в [3].

В доповіді планується обговорити дуже важливе поняття видимості в мінливих множинах (яке характеризує, наскільки адекватними одне до одного можуть бути описи подій різними спостерігачами) та різні градації видимості. Зокрема, буде розглянуто найбільш сильну форму видимості — еволюційну видимість, коли довільні об'єднані долею в одній системі відліку елементарно-часові стани переходять в об'єднані долею або синхронні в іншій системі відліку. Важливі для спеціальної теорії відносності та її тахіонових розширень мінливі множини є еволюційно видимими, оскільки вони будуються як мультиобраз $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P},\mathcal{B}]$ деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}$ і можна довести, що довільний мультиобраз є еволюційно видимим (детальніше див. [3, subsection 27.3, Assertion 3.27.7]). В доповіді буде розглянуто обернену задачу:

Чи кожну еволюційно видиму мінливу множину можна подати у вигляді мультиобраза деякої базової мінливої множини?

Література

[1] Я.І. Грушка, *Видимість у мінливих множинах.* Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **9**, (2), (2012), 122–145, (https://www.researchgate.net/publication/236217050).

[2] Я.І. Грушка, Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **11**, (1), (2014), 122–145, (https://www.researchgate.net/publication/268069239).

[3] Ya.I. Grushka, *Draft Introduction to Abstract Kinematics (Version 2.0).* Preprint ResearchGate: DOI: 10.13140/RG.2.2.28964.27521, (2017).

e-mail: grushka@imath.kiev.ua

Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з блочною структурою

Віталій Дронь, Мединський Ігор

Інститут прикладних проблем математики і механіки, Львів, Україна

Університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

Дослідження присвячене ультрапараболічним рівнянням, які за виконання певних умов є узагальненням добре відомого виродженого параболічного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова [1].

Розглядатимемо задачу Коші для рівняння

$$(S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1+n_2+n_3$; $x := (x_1, x_2, x_3)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$; $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x)|\ t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$\begin{aligned} S_B &:= \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} b_{ij}^1 x_{1i} \right) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \left(\sum_{i=1}^{n_2} b_{ij}^2 x_{2i} \right) \partial_{x_{3j}}, \\ A(t,x,\partial_{x_1}) &:= \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x) \partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} + \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t,x) \partial_{x_{1i}} + a_0(t,x). \end{aligned} \tag{2}$$

Перший диференціальний вираз з (2) у матричній формі має вигляд $S_B = \partial_t - (x, BD_x)$, де B – матриця розміру $n \times n$, яка має таку структуру:

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \tag{3}$$

B^1 , B^2 – матриці, складені відповідно з дійсних чисел b_{ij}^1, $i \in \{1, ..., n_1\}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, b_{ij}^2, $i \in \{1, ..., n_2\}$, $j \in \{1, ..., n_3\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := col(\partial_{x_{11}}, ..., \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, ..., \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, ..., \partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Накладаються умови:

$\mathbf{A}_1$. Матриця (3), в якій блоки B^1 і B^2, записані відповідно у вигляді $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix}$, де B_1^1, B_2^1, B_1^2 і B_2^2 – матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$ задовольняють умову $\det B_1^i \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$;

$\mathbf{A}_2$. Існує така стала $\delta > 0$, що для кожної точки $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ виконується нерівність $\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\sigma_{1i}\sigma_{1j} \ge \delta \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_{1i}^2$.

Клас рівнянь (1) при виконанні умов $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{A}_2$ часто (наприклад, в [2]) позначається через $\mathbf{E}_{22}^B$. Він узагальнює клас ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова $\mathbf{E}_{22}$, введений у монографії [3]. Рівняння типу (1) з'являються в моделях дифузії з інерцією, а також при дослідженні математичних моделей азійських опціонів, коли змінні, що залежать від траєкторії ціни, включають до простору станів. В [2] для рівнянь (1) було побудовано так званий фундаментальний L-розв'язок, досліджено його властивості та коректну розв'язність задачі Коші.

Для отримання результатів на коефіцієнти рівняння (1) ставляться ще такі спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних:

$\mathbf{A}_3$. Коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ (тобто функції a_{ij}, a_i, a_0) є обмеженими, неперервними за t на відрізку $[0,T]$ та гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:
$\exists H_1 > 0,\ \exists \alpha_1 \in (0,1] \quad \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \forall z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}: \quad \left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1};$

$\exists H_2>0,\ \exists H_3>0,\ \exists \alpha_2\in(1/3,2/3]\ \ \forall (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i},\ i\in\{1,2\},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\right|\le H_2(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2}),$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\right|\le H_3|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2});$$

$\exists H_4>0,\ \exists H_5>0,\ \exists \alpha_3\in(3/5,4/5]\ \ \forall (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i},\ i\in\{1,3\},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)\right|\le H_4(h^{5\alpha_3/2}+|X_3(h)-z_3|^{\alpha_3}),$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)\right|\le H_5|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{5\alpha_3/2}+|X_3(h)-z_3|^{\alpha_3}),$$

де $X_i(h):=(X_{i1}(h),...,X_{in_i}(h)), i\in\{1,2,3\},\ X_{1j}(h):=x_{1j}, j\in\{1,...,n_1\}, X_{2j}(h):=x_{2j}+$
$+h\sum\limits_{i=1}^{n_1}b_{ij}^1x_{1i}, j\in\{1,...,n_2\},\ X_{3j}(h):=x_{3j}+h\sum\limits_{i=1}^{n_2}b_{ij}^2x_{2i}+\frac{h^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\sum\limits_{s=1}^{n_2}b_{sj}^2b_{is}^1x_{1i},\ j\in\{1,...,n_3\},$
$h\in\mathbb{R};\ \Delta_{x_1}^{\xi_1}a(\cdot,x):=a(\cdot,(x_1,x_2,x_3))-a(\cdot,(\xi_1,x_2,x_3)),\ \Delta_{x_2}^{\xi_2}a(\cdot,x):=a(\cdot,(x_1,x_2,x_3))-$
$-a(\cdot,(x_1,\xi_2,x_3)),\ \Delta_{x_3}^{\xi_3}a(\cdot,x):=a(\cdot,(x_1,x_2,x_3))-a(\cdot,(x_1,x_2,\xi_3)),\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$

$\mathbf{A}_4$. В $\Pi_{[0,T]}$ існують обмежені похідні $\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}a_{ij}$ і $\partial_{x_{1i}}a_i$, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера у сенсі $\mathbf{A}_3$.

В [4] було доведено, що якщо для коефіцієнтів рівняння (1) виконануються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_3$, то для нього існує класичний ФРЗК Z.

У цьому дослідженні за виконання умов $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах, а також інтегральні зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші.

Отримані результати є реалізацією відомого підходу Ейдельмана–Івасишена [3]. Вони можуть бути використані для подальших досліджень задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії випадкових процесів при вивченні марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^B$.

Література

[1] Kolmogoroff A. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung).* Ann.Math. 1934, **35**, No.1, 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123

[2] Івасишен С.Д., Лаюк В.В. *Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова.* Мат. методи і фіз.-мех. поля 2007, **50** (3), 56–65.

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser. Basel 2004, Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 152. https://doi.org./10.1007/978-3-0348-7844-9.

[4] Dron V.S., Medynskyi I.P. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic equations in the Asian options models.* Math. Modeling and Computing 2024 (прийнято до друку).

e-mail: vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua

Про наближене оптимальне керування для диференціального включення зі збуреннями в коефіцієнтах та нефіксованим часом

Тетяна Жук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

В роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з многозначною правою частиною, коефіцієнти якої містять швидкоколивні змінні. Мінімізація корцитивного цільового функціоналу відбувається на нефіксованому часовому проміжку, де кінцевий момент часу визначається як перший момент потрапляння фазової точки на задану замкнену обмежену підмножину фазового простору. Доведено розв'язність цієї задачі та обгрунтована збіжність оптимальних рішень вихідної задачі до оптимального процесу задачі з усередненими параметрами. Слід відзначити, що відомі досьогодні результати щодо обгрунтування схеми усереднення для задач оптимального керування [1-3] застосовувались на фіксованих часових інтервалах (або скінченних, або нескінченних). В даній роботі метод усереднення застосовано до задачі з моментом τ першого досягнення границі області, який залежить від керування ($\tau = \tau(u)$).

Для фазової змінної $x(t) \in R^n$ і керування $u(t) \in R^m$ розглядається наступна задача оптимального керування:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) \in f\left(\tfrac{t}{\epsilon}, x(t)\right) + g(x(t)) \cdot u(t), \quad t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{gathered} \tag{1}$$

$$u \in U = \left\{u \in L^2(0,+\infty) \mid \|u(t)\| \le \xi \quad \text{для м.в.} \quad t > 0\right\} \tag{2}$$

$$J(x,u) = \int_0^{\tau} \left[e^{-\delta t} \cdot \varphi(x(t)) + \|u(t)\|^2\right] dt \to \inf, \tag{3}$$

де $\epsilon > 0$ - малий параметр, $x_0 \in intD, \quad D \subset R^n$ - задана обмежена, замкнена множина, $\xi,\ \delta$ - задані додатні пораметри, $\tau \in (0,+\infty]$ визначається як момент першого виходу розв'язку включення $x(t)$ на границю області D.

При досить загальних умовах на многозначну функцію f та нелінійні функції g, φ в роботі показано розв'язність задачі (1) - (3).

Далі, вважаючи, що в метриці Хаусдорфа існує рівномірна по $x \in R^n$ границя

$$f_0(x) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t,x)dt, \tag{4}$$

розглядаємо задачу

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) \in f_0(y(t)) + g(y(t)) \cdot u(t), \\ y(0) = x_0 \end{gathered} \tag{5}$$

$$u \in U \tag{6}$$

$$J(y,u) = \int_0^{\tau_0} \left[e^{-\delta t} \cdot \varphi(y(t)) + \|u(t)\|^2\right] dt \to \inf, \tag{7}$$

де $\tau_0 \in (0,+\infty]$ - момент першого виходу $y(t)$ на ∂D.

Основним результатом роботи є доведення того факту, що оптимальний процес $\{\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon\}$ і значення $J(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ задачі (1) - (3) збігаються при $\epsilon \to 0$ до оптимального процесу $\{\bar{y}, \bar{u}\}$, і значення $J(\bar{y}, \bar{u})$ задачі (5)-(7). Це, зокрема, означає, що оптимальне керування усередненої задачі може слугувати наближенням для розв'язку вихідної задачі.

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект No. 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

[1] Kichmarenko O.D. Shemes of Complete Averaging in the Problem of Optimal Control Over a functional-differential system // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 243 (3).

[2] Nosenko T.V., Stanzhyts'kyi O.M. Averaging method in some problems of optimal control // Nonlinear Oscillations, 2008, V. 11(4).

[3] Kasimova N., Zhuk T., Tsyganivska I. Approximate solution of the optimal control problem for non-linear differential inclusion on the semi-axes // Georgian Mathematical Journal, 2023, V.30(6).

e-mail: zhuktanya18@ukr.net

Ймовірнісна теорія нега-Q_s зображення чисел

Володимир Єлагін, Микола Працьовитий
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нагадаємо суть поліосновного Q_s-зображення та нега-Q_s-зображення чисел відрізка $[0,1]$. Нехай $Q_s \equiv (q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ — заданий ймовірнісний (стохастиний) вектор з додатними координатами (тобто $q_i > 0, q_0 + \ldots + +q_{s-1} = 1 = \beta_s; \beta_0 = 0, \beta_{i+1} = \beta_i + q_i = q_0 + \ldots + q_i, i = 0, 1, \ldots, s-1$).

Теорема 1. *Для будь-якого $x \in [0;1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_s$ така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\ldots} \tag{1}$$

$$x = 1 - \gamma_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \gamma_k \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \equiv \overline{\Delta}^{Q_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{2}$$

де γ_n визначаються так:

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 - \beta_{\alpha_n}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \beta_{\alpha_{n+1}}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду (2) і його суми x називається Q_s - зображенням числа x, при цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ n-ою цифрою цього зображення. Аналогічно, запис $\overline{\Delta}^{Q_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду (4) і його суми x називається нега$-Q_s$ - зображенням числа x, при цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ n-ою цифрою цього зображення.

Розподіл $\zeta = \Delta^{Q_s}_{\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots}$ є добре вивченим. Він має чистий лебегівський тип, тобто є чисто дискретним, чисто абсолютно неперервним або чисто сингулярним. Необхідні та достатні умови належності до кожного типу відомі. [2]

У доповіді пропонуються результати дослідження розподілу випадкової величини $\Theta = \overline{\Delta}^{Q_s}_{\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_n\ldots}$, опис його тополого-метричних та фрактальних властивостей, структура точкового та неперервного спектрів.

Теорема 2. *Розподіл випадкової величини Θ є чисто дискретним або чисто неперервним, причому дискретним лише за умови*

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} max\{p_{0n}, \ldots, p_{s-1,n}\} > 0.$$

У випадку дискретності його точковим спектром є хвостова множина нега-Q_s-зображення, представником якої є число $x = \overline{\Delta}^{Q_s}_{c_1,c_2,\ldots,c_n\ldots}$, $p_{c_n,n} = max\{p_{0n}, \ldots, p_{s-1,n}\}$. У випадку неперервності в.в. Θ має чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний розподіл.

Необхідні та достатні умови сингулярності знайдено. У доповіді будуть наведені цікаві частинні випадки абсолютної неперервності, коли щільність має певну однорідність диференціального характеру (на цілому проміжку).

Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь зі швидко змінними нелінійностями

В'ячеслав Євтухов

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $n \geq 2$, $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$- двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{[\varphi'(y)]^2} = 1, \tag{2}$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- однобічний окіл Y_0.

Згідно з умов (2)

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \sim \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty$$

і тому функція φ є (див. [1],[2]) швидко змінною при $y \to Y_0$.

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0.$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty \end{cases} \quad (k = \overline{1, n-1}), \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

При $n = 2$ асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків диференціального рівняння (1) досліджувалась в роботах [3-5], а при $n = 3$ - в [6-7].

В даній доповіді формулюються отримані для загального випадку $n \geq 2$ рівняння (1) результати про необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків, для яких $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$, а також про асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідих до порядку $n-1$ включно. Встановлено, що для кожного такого розв'зку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\varphi'(y(t)) = -\frac{\alpha_0 \prod\limits_{j=2}^{n} a_{0j}}{(\lambda_0 - 1)^{n-1}} \frac{1 + o(1)}{J(t)},$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

де

$$a_{0j} = (n - j)\lambda_0 - (n - j - 1) \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якшо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \end{cases} \qquad J(t) = \int_A^t \pi_\omega^{n-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau, \quad A \in \{\omega; a\}.$$

Крім того, вирішується питання про кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями.

У випадку правильно змінної при $y \to Y_0$ функції φ результати про асимптотику всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$– розв'яків рівняння (1) отримані в [2].

1. Maric V. Regular variation and differential equations. Lecture Notes in Math.,1726(2000).-127p.
2. N.H.Bingham ,C.M. Goldie ,J.L. Teugels Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge Univ.Press,Cambridge. –(1987) –494p.
3. Евтухов В.М., Черникова А.Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями// Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 10. С. 1345-1363.
4. Евтухов В.М., Черникова А.Г. Об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями// Укр. мат. журн. 2019. Т.71, № 1. С. 73-91.
5. Евтухов В.М., Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. 2007.Т. 43, №9. С. 1311-1323.
6. V.M.Evtukhov V.M., Sharay N.V. Asymptotic behaviour of solutions of third order differential equation with rapidly varying nonlinearities// Mem. Diff. Eq, and Math. Phys. 2019. v. 77. P. 1-15.
7. Євтухов В. М. Шарай Н.В. Асимптотика швидко змінних розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку зі швидко змінною нелінійностю // Укр. мат. Журнал. 2022. Т.74, № 6. С.812-828
8. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями// Дифференц. уравнения. – 2011. - т. 47, № 5. - С. 628-650.

e-mail: evtukhov@onu.edu.ua

Крайова задача для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю

Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

Зафіксуємо множину

$$\mathcal{N} = \{\nu_k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\},$$

яку будемо називати спектром функцій, якщо вона підпорядкована таким умовам:

1) рівність $\nu_k = \nu_r$ справджується лише при $k = r$, тобто відображення $k \leftrightarrow \nu_k$ є бієктивним відображенням $\mathbb{N}$ на множину $\mathcal{N}$;

2) $\nu_k^2 \to \infty$ при $k \to \infty$.

Введемо шкалу $\{\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}(\Omega)\}_{d,r\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}(\Omega)$, $d, r \in \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$, — гільбертів простір функцій

$$u(t, \Omega) = \sum_{(k,m)\in\Omega} u_{k,m}\, e^{\tau(m)t} x_k,$$

де $\tau(m) = (\ln \mu + i\, 2\pi m)/T$, $\ln \mu$ — головне значення логарифма, зі скалярним добутком

$$\big(u(\cdot, \Omega), v(\cdot, \Omega)\big)^2_{d,r} = \sum_{(k,m)\in\Omega} (1 + \|\alpha_k\|^2)^d (1 + m^2)^r u_{k,m} \bar{v}_{k,m},$$

що індукує норму

$$\|u(\cdot, \Omega)\|^2_{d,r} = \sum_{(k,m)\in\Omega} (1 + \|\alpha_k\|^2)^d (1 + m^2)^r |u_{k,m}|^2.$$

Введено припущення про ріст вектора α_k, а саме $\|\alpha_k\| > C|\nu_k|^{\beta_0}$, $C > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$.

Розглянуто задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною (слабко нелінійною) правою частиною

$$L(d_t, \hat{A})u = \sum_{|\hat{s}|\le n} a_{\hat{s}} \hat{A}_1^{s_1} \ldots \hat{A}_p^{s_p} d_t^{s_0} u(t) = \varepsilon f(u), \tag{1}$$

$$\mu d_t^{s_0} u\big|_{t=0} - d_t^{s_0} u\big|_{t=T} = 0, \qquad s_0 = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $\hat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$, $d_t = d/dt$, коефіцієнти $a_{\hat{s}}$ та параметри ε і μ є комплексними числами ($a_{(n,0)} = 1$, $\mu \ne 0$); $A_i \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $i = 1, \ldots, p$, — $\hat{A}_i \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ — лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення, тобто існує повна ортонормована система елементів $x_k \in \mathbf{X}$, а саме виконуються рівності

$$\hat{A}_i x_k = \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1, \ldots, p, \quad k \in \mathbb{N},$$

для деяких комплексних чисел α_{ik}; $\mathbf{X}$ — сепарабельний гільбертів простір.

Встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у шкалі $\{\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}(\Omega)\}_{d,r\in\mathbb{R}}$. Розв'язок задачі знайдено у вигляді границі послідовності гладких (аналітичних) функцій зі скінченно-вимірних підпросторів просторів $\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}$. Доведення розв'язності задачі проведено за ітераційною схемою Неша-Мозера. Найбільш важливим моментом у схемі Неша-Мозера є отримання оцінок норм лінійних операторів, що виникають при оберненні лінеризованих операторів у кожній ітерації алгоритму, а основна трудність, яка з цим пов'язана — це їх діагональні елементи, які можуть бути як завгодно малими. Таким чином, нелокальна задача (1), (2) є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від проблеми малих знаменників, для подолання якої використано метричний підхід. Саме тому розв'язки задачі знайдено не на множині всіх параметрів задачі, а на множині тих параметрів, для яких власні значення лінеризованих операторів не є близькими до нуля. Проблему оборотності нескінченно-вимірного лінеризованого оператора вирішено, замінивши його послідовністю скінченно-вимірних, накладанням на кожному кроці схеми скінченного числа умов на параметри задачі.

e-mail: ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua, i.volyanska@i.ua

Муфангові лайнери та їх зв'язок з фалесовими

Олексій Ільчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Основною метою цієї роботи було узагальнення муфангових площин, так щоб у них допускалися різні аксіоми паралельності, а також вища за 2 вимірність. Для цієї задачі була обрана аксіоматика лайнера, яка грунтується на двох наступних аксіомах:

Лайнером називатимемо пару $(X, \mathcal{L})$, де – довільна множина точок та $\mathcal{L}$ – сім'я прямих, для якої:

- Для довільних двох точок x, y з X існує єдина пряма L з $\mathcal{L}$, така що x та y належать L;
- Для довільної прямої L з $\mathcal{L}$ існують дві різні точки x, y з X, які належать L.

Муфангові площини це такі проєктивні площини, для яких справджується мала теорема Дезарга, а саме: для довільних перетинних в точці o прямих A, B, C та трикутників abc і $a'b'c'$, де a та a' належать A, b та b' належать B і c та c' належать C, якщо перетини продовжень двох пар сторін належать прямій, на якій лежить точка o, то і перетин третьої пари сторін належить цій прямій. Їх активно досліджувала німецька математикиня Рут Муфанг, тому вони названі в її честь.

Муфанговим лайнером називатимемо лайнер з аксіомою, яка є узагальненням малої теореми Дезарга і спирається на аксіоматику лайнерів, а саме: для довільних різних паралельних, або перетинних в одній точці прямих A, B, C, D та різних точок a, a' з A, b, b' з B та c, c' з C, якщо перетини продовжень сторін ab та $a'b'$ і bc та $b'c'$ належать D, то і перетин продовжень сторін ac та $a'c'$ належить D.

Таким чином, проєктивні площини, для яких справджується запропонована аксіома, будуть звичними муфанговими площинами, однак запропонована аксіома може справджуватися і для афінних геометрій.

Фалесовим лайнером називатимемо лайнер, для якого: для довільних різних паралельних прямих A, B, C та трикутників abc та $a'b'c'$, де a та a' належать A, b та b' належать B і c та c' належать C, якщо сторони ab і $a'b'$ паралельні та bc і $b'c'$ – паралельні, то сторони ac та $a'c'$ теж паралельні.

Для того, щоб переконатися у тому, що аксіома добре визначена використовувалися наступні умови:

- при проєктивному поповненні муфангового лайнера має утворюватися муфанговий лайнер;
- якщо проєктивний муфангового лайнер є проєктивним поповненням деякого афінного лайнера, то цей афінний лайнер теж є муфанговим;
- муфанговий лайнер є фалесовим;
- дезарговий лайнер, тобто лайнер, для якого справджується теорема Дезарга, є муфанговим.

У ході роботи було показано, що для запропонованої аксіоми виконуються усі висунуті вимоги, а також було доведено допоміжні твердження та леми.

Якісна поведінка еволюційних включень з многозначною правою частиною більш ніж лінійного росту

Олексій Капустян, Олександр Станжицький, Юлія Федоренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Робота присвячена вивченню питань глобальної розв'язності та притягуючих множин для параболічних включень. Стандартними умовами на многозначну функцію взаємодії, які забезпечують глобальну розв'язність, є або не більш як лінійний ріст [1], або наявність неперервного селектору [2]. В даній роботі за умов знаку і росту типу реакція-дифузія ми встановлюємо глобальну розв'язність в фазовому просторі L^2. Для відповідної многозначної розв'язуючої напівгрупи (m-напівпотоку) доведено існування в фазовому просторі L^2 глобального атрактору - компактної інваріантної множини, що притягує всі траєкторії рівномірно по обмеженим (в L^2- нормі) початковим даним. Постановка задачі і основні результати полягають в наступному: в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d \geq 1$ відносно невідомої функції $u = u(t,x),\ (t,x) \in Q = (0,+\infty) \times \Omega$ розглядаємо наступну початково-крайову задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u \in f(u) + h(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $h \in L^2(\Omega)$, многозначне відображення f задовольняє умови:

$$f : \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R}) - \text{напівнеперервне зверху [3]},\ 0 \in f(0), \tag{2}$$

існують константи $C \geq 0,\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,\ p \geq 2$ такі що $\forall\ s \in \mathbb{R}\ \forall \xi \in f(s)$

$$-C - \alpha_1 |s|^p \leq \xi \cdot s \leq C - \alpha_2 |s|^p. \tag{3}$$

Будемо розглядати задачу (1) в фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$, норму і скалярний добуток в якому будемо позначати $\|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$. Для $u_0 \in X, T > 0$ розв'язок (1) на $[0,T]$ будемо розуміти в сенсі наступного означення.

Означення 1. Функцію $u = u(t,x), (t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega$ будемо називати (слабким) розв'язком (1) на $(0,T)$, якщо існує $l \in L^q(Q_T)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, така що u - слабкий розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = l + h, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{4}$$

$$l(t,x) \in f(u(t,x) \text{ майже скрізь на } Q_T. \tag{5}$$

Те, що u - слабкий розв'язок задачі (4) означає, що $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ і $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)\ \ \forall \eta \in C_0^\infty(0,T)$

$$-\int_0^T (u,v)\eta_t + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)\eta = \int_0^T \int_\Omega (l(t,x) + h(x))v(x)\eta(t)dxdt. \tag{6}$$

З (6) і теорем вкладення виводимо, що $u \in \mathbb{C}([0,T]; H^{-s}(\Omega)),\ s = max\{1, n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\}$, зокрема умова $u|_{t=0} = u_0$ має сенс.

Теорема 1. *За умов (2),(3) для всіх $u_0 \in X, T > 0$ задача (1) має розв'язок на $(0,T)$ в сенсі Означення 1, причому цей розв'язок належить $L^p(Q_T)$.*

В силу Теореми 1 коректно означене відображення $G : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$

$$G(t, u_0) = \{u(t) | u(\cdot) - \text{розв'язок } (1),\ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))\}. \quad (7)$$

Теорема 2. *M - напівпотік (7), породжений розв'язками задачі (1), має стійкий глобальний атрактор Θ. Крім того, якщо $h \in L^\infty(\Omega)$, то множина Θ є обмеженою в $L^\infty(\Omega)$.*

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект No. 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

[1] Denkowski Z., Mortola S. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1993, vol. 78.

[2] Feketa P., Kapustyan O., Kapustian O., Korol I. Global attractors of mild solutions semiflow for semilinear parabolic equation without uniqueness // Appl. Math. Lett. 2023, vol. 135.

[3] Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. Birkhauser, 1990.

e-mail: kapustyan@knu.ua, stanzhytskyi@knu.ua, iuliiafedorenko@knu.ua

Розв'язок задачі синтезу для збуреної двовимірної канонічної системи

Валерій Коробов, Тетяна Ревіна

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

Розглянемо канонічну систему (double inegrator)

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = u \end{cases} \tag{1}$$

при обмеженнях на керування $|u| \leq 1$.

Задача синтезу полягає в знаходженні обмеженого керування $u = u(x)$ такого, що траєкторія замкненої системи, яка починається у довільній початковій точці $x_0 \in \mathbb{R}^2$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0)$. Для розв'язку цієї задачі Коробовим В. І. у 1979 році був запропонований метод функції керованості [1]. Ми суттєво спираємося на випадок, коли функція керованості є часом руху (settling-time function). Загальний підхід до розв'язку задачі синтезу для довільної лінійної системи був запропонований у [2].

Теорема 1. *(Коробов В. І, Скляр Г. М. [2]) Нехай $\nu \geq 1$. При $x \neq 0$ визначимо функцію керованості $\Theta = \Theta(x)$ як єдиний додатній розв'язок рівняння*

$$2a_0\Theta^{3+\nu} = x_1^2(2+\nu)^2(3+\nu) + 2x_1x_2(2+\nu)(3+\nu)\Theta + 2x_2^2(2+\nu)\Theta^2 \tag{2}$$

Визначимо функцію керованості в точці нуль рівністю $\Theta(0) = 0$. Позначимо $Q = \{x :\ \Theta(x) \leq c\}$. Тоді при достатньо малих значеннях коефіцієнта $a_0 :\ 0 < a_0 \leq a_f$ керування

$$u(x_1, x_2) = -\frac{x_1(2+\nu)(3+\nu)}{2\Theta^2} - \frac{x_2(2+\nu)}{\Theta}, \tag{3}$$

де $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ - єдиний додатній розв'язок рівняння (2), розв'язує для системи (1) задачу локального позиційного синтезу та задовольняє обмеженню $|u(x)| \leq 1$. Крім того, виконується рівність $\dot{\Theta}(x) = -1$, тобто функція керованості $\Theta(x)$ є часом руху із довільної початкової точки $x \in Q$ в початок координат.

У роботі [2] наводиться досить складний спосіб знайдення a_0 для довільної лінійної керованої системи.

Завдання данного дослідження полягає у наступному

1. Знайти a_0. Відповідь: $a_0 = \dfrac{1}{c^{\nu-1}(2+\nu)}$.
2. Довести, що лінії рівня функції Θ при $\Theta = 1$ – еліпси, які вкладені один в одного зі збільшенням параметру ν.

Далі дослідимо задачу синтезу для збуреної двовимірної канонічної системи з неперервним обмеженим невідомим збуренням. Отже, система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2))x_2, \\ \dot{x}_1 = u, \end{cases} \tag{4}$$

де $t \geq 0,\ \ (x_1, x_2) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, Q - це окіл нуля; $u \in \mathbb{R}$ - керування, яке задовільняє обмеженню $|u| \leq 1$. Ми вважаємо, що функція $p(t, x_1, x_2)$ *невідома неперервна функція* та $p_1 < p(t, x_1, x_2) < p_2$, причому $p_1 < 0,\ p_2 > 0$.

Завдання данного дослідження полягає у наступному

1. Чи можна застосовувати керування (3) для розв'язку задачі синтезу для системи зі збуренням (4)?

2. Якщо так, то знайти обмеження на збурення p_1, p_2. Чи можна одне з строгих обмежень на збурення змінити на нестроге обмеження?
3. Знайти обмеження на час руху з довільної початкової точки у початок координат.

Теорема 2. *Нехай* $\nu \geq 1$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$, $c > 0$ *та функція керованості* $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ *визначена як єдиний додатній корінь рівняння (2). Нехай* $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$,

$$p_1^0 = \max\{(1-\gamma_1)\tilde{p}_1^0; (1-\gamma_2)\tilde{p}_2^0\}, \quad p_2^0 = \min\{(1-\gamma_1)\tilde{p}_2^0; (1-\gamma_2)\tilde{p}_1^0\}, \quad \tilde{p}_1^0 = -1, \quad \tilde{p}_2^0 = \frac{\nu}{2+\nu}. \tag{5}$$

Тоді для всіх $p_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq p_2$, *таких, що* $[p_1; p_2] \subset (p_1^0; p_2^0]$, *траєкторія замкненої системи з керуванням (3), яка починається з довільної початкової точки* $x(0) = x_0 \in Q$, *закінчується у початку координат за скінченний час* $T = T(x_0, p_1, p_2)$, *який задовільняє обмеженню*

$$\Theta(x_0)/\gamma_2 \leq T(x_0, p_1, p_2) \leq \Theta(x_0)/\gamma_1. \tag{6}$$

Зауваження. 1. При $\nu = 1$ в обох теоремах синтез глобальний.

2. Скінченність часу руху (settling-time function) випливає з нерівності на похидну функції керованості в силу збуреної системи [2] $-\gamma_2 \leq \dot{\Theta} \leq -\gamma_1$.

3. Можна брати $p_2 = p_2^0$. Доведення цього факту істотно спирається на принцип інваріантності Ла Саля [5]. В попередніх роботах [3, 4] обидві нерівності були строгими.

4. Різниця $p_2^0 - p_1^0$ монотонно спадає за γ_1 та монотонно зростає за γ_2 та найширший інтервал – це $\tilde{p}_2^0 - \tilde{p}_1^0$. Крім цього, права і ліва частина нерівності на час руху (settling-time function) $T(x_0, p_1, p_2)$ (6) також монотонно спадає за γ_1 та монотонно зростає за γ_2. Якщо γ_1 and γ_2 "близькі"до 1, то значення p_1^0 та p_2^0 задані (5) "близькі"до 0. В цьому випадку оцінка на час руху (6) "близька"до $\Theta(x_0)$. З іншого боку, найширший інтервал $(\tilde{p}_1^0; \tilde{p}_1^0)$ достигається якщо $\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to \infty$, але оцінка на час руху (settling-time function) вироджена: $0 \leq T(x_0) \leq \infty$.

5. Для знаходження траєкторії, яка починається у заданій початковій точці $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in Q$, обираємо $p_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq p_2$, потім знаходимо єдиний додатній корінь рівняння (2) $\Theta_0 = \Theta(x_1^0, x_2^0)$. Нехай $\theta(t) = \Theta(x(t))$. Шукана траєкторія є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2))x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{x_1(2+\nu)(3+\nu)}{2\theta^2(t)} - \dfrac{x_2(2+\nu)}{\theta(t)}, \\ \dot{\theta} = -\dfrac{2(1 + p(t, x_1, x_2))\, x_1^2\theta^2 - 2(1 + p(t, x_1, x_2))(2+\nu)\, x_1 x_2 \theta + (1+\nu)(2+\nu)x_2^2}{2\, x_1^2\theta^2 - 2(2+\nu)\, x_1 x_2 \theta + (1+\nu)(2+\nu)x_2^2}, \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_1^0, \quad \theta(0) = \Theta_0. \end{cases} \tag{7}$$

Робота виконана за підтримки гранту від фонду імені Н. І. Ахієзера.

Література

[1] Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости //Математический сборник. — 1979. — 109. — №. 4 (8). — С. 582-606.

[2] Коробов В. И., Скляр Г. М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914 – 1924.

[3] Korobov V.I., Revina T.V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system// IMA J. Math. Control and Information. – 2021. – 38, No. 1. – pp. 396-416, https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035

[4] Korobov V. Revina T. On the feedback synthesis for an autonomous linear system with perturbations. Journal of Dynamical and Control Systems, 2024 (To appear). https://doi.org/10.1007/s10883-024-09690-4

[5] LaSalle J. P. The extent of asymptotic stability. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1960; 46.3: 363-365.

e-mail: valeriikorobov@gmail.com, t.revina@karazin.ua

Дослідження диференціально-алгебраїчних систем з з імпульсною дією та двоточковими крайовими умовами

Король І.І., Чепканич О.В., Скворцов І.В.

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

У роботі розглядається алгебро-диференціальна система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)y + f(t,x,y), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a,b], \\ 0 = g(t,x,y), \quad y, g \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1}$$

з імпульсною дією

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i, \quad det(\mathbb{E}_n + B_i) \neq 0, \quad b_i \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

підпорядкована лінійним крайовим умовам

$$Bu(a) + Cu(b) = d, \tag{3}$$

де $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1}^n$ – $(n \times n)$-вимірна матриця з неперервними коефіцієнтами, $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ – відповідно n та m-вимірні вектор-функції, $f(t,x,y), g(t,x,y) \in C[a,b]$; B, C – $(n \times (n+m))$-вимірні сталі матриці, $u = col(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $a \leq \tau_1 < \ldots < \tau_p \leq b$, d – n-вимірний сталий вектор.

Для нелінійних алгебро-диференціальних систем (1) з імпульсною дією вигляду (2), підпорядкованих крайовим умовам (3) обґрунтовано застосування чисельно-аналітичного методу дослідження існування та наближеної побудови розв'язків. Встановлено необхідні та конструктивні достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки побудованих послідовних наближень.

[1]. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.

[2]. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000, 294 с.

[3]. Король І.І. Про розв'язність крайових задач для вироджених диференціальних систем з імпульсною дією// Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. — 2009. — Вип. 454. Математика. — С. 46–49.

e-mail: korol.ihor@gmail.com, oleksandr.chepkanych@uzhnu.edu.ua, ihor.skvortsov@uzhnu.edu.ua

Про деякі конструкції чисел, ланцюгове зображення яких задовольняє умови Хінчина-Леві

Ростислав Кривошия

Кропивницький будівельний фаховий коледж, Кропивницький, Україна

Нехай $[a_1, a_2, \ldots, a_n, ...]$ — класичне ланцюгове зображення числа $x \in (0;1)$. Як відомо [2] для майже всіх чисел $x = [a_1; a_2; ...; a_k; ...]$ виконуються умови

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to +\infty \ \ (n \to +\infty), \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^{\log_2(k)} \approx 2,6854 - \text{стала Хінчина} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log_2(n+1)}{n(n+1)}\right)^{-1} \approx 1,7154. \tag{3}$$

Як було показано в [4, 3] для майже всіх чисел $x = [a_1; a_2; ...; a_k; ...]$ виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \le j \le n; a_j = l\} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{l(l+1)}\right) \ \ \forall l \in N. \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай* $a_l = \log_2 \left(1 + \frac{1}{l(l+1)}\right)$ *для кожного натурального* l.*Для майже всіх чисел* $t \in (1; +\infty)$ *число, послідовні цифри ланцюгового представлення якого мають вигляд*

$$\underbrace{11...1}_{[a_1 t]}, \underbrace{11...1}_{[a_1 t^2]}, \underbrace{22...2}_{[a_2 t^2]}, ..., \underbrace{11...1}_{[a_1 t^n]}, ..., \underbrace{nn...n}_{[a_n t^n]}, ...$$

задовольняє умови (1), (2), (3), (4), *де* $[x]$ *— ціла частина числа* x.

Література

[1] Khintchine A. *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Math. France, **1**, 361–382 (1935).

[2] Levy P. *Sur les lois de probabilite dont dependent les quotients complets et incomplets dune fraction continue*, Bull. Soc. Math. France, **57**, 178–194 (1929).

[3] Ryll-Nardzewski C. *On the ergodic theorems II (Ergodic theory of continued fractions)*, Studia Mathematica **12**, 74–79 (1951).

e-mail: mostik19@gmail.com

Метод можливих напрямків для двокритеріальної моделі Марковіца

Василь Кушнірчук, Володимир Кушнірчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Багатокритеріальні задачі оптимізації широко застосовуються в економіці, інженерії, IT, екології, фінансах, логістиці та інших галузях, оскільки більшість реальних процесів і рішень потребують одночасного врахування кількох взаємно суперечливих критеріїв.

Більшість відомих підходів до розв'язування задачі багатокритеріальної оптимізації базується на її зведенні до задачі нелінійного програмування. Одним з основних методів такого типу є метод згорток, в якому всі критерії згортаються в один критерій. Використовуються також мультиплікативні згортки, методи поступок, цільового програмування та інші.

Але з успіхом застосовується й інший підхід, в якому не проводиться попередній перехід до задачі нелінійного програмування в явному вигляді. Фактично такі методи є узагальненням відомих локальних і глобальних методів нелінійного програмування на задачі з кількома критеріями.

Одним з таких методів є метод можливих напрямків, запропонований Зойтендейком для розв'язування задач опуклого програмування. Подальші модифікації цього методу стосувалися його застосуванню для розв'язування задач нелінійного програмування. Різні версії методу відрізняються між собою як видом допоміжної задачі, типом нормуючих обмежень, вибором кроку спуску, так і різними способами боротьби з "зигзагоподібністю" руху.

Так, якщо метод трактувати як метод мінімізації деякої допоміжної функції, яка залежить не тільки від вихідних прямих змінних, але й від оцінки зверху оптимального значення цільової функції, то можна узагальнити його на випадок розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації. Аналогічно можна узагальнити й інші методи нелінійного програмування – штрафних функцій, лінеаризації, центрів, функції Лагранжа тощо.

В роботі використано метод можливих напрямків для двокритеріальної моделі Марковіца побудови оптимального інвестиційного портфеля, що балансує між прибутковістю та ризиком. Вона дозволяє інвестору максимізувати очікуваний дохід портфеля при мінімізації ризику (дисперсії).

$$\text{Мінімізувати } \sigma_p^2 = w^T Cov(\sigma_{ij}) w$$

$$\text{Максимізувати } \mu_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$$

при умовах:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i$$

Тут n — кількість активів,
μ_i - очікуваний дохід активу i, де $i = 1, 2, \ldots, n$,
w_i - частка коштів, вкладених в актив i (ваги портфеля),
$Cov(\sigma_{ij})$ - коваріаційна матриця між доходами активів (ризик активів), де σ_{ij} - коваріація між доходами активів i та j.

В методі можливих напрямків використовується допоміжна функція

$$max\{w^T Cov(\sigma_{ij})w - \sigma_p^2, \mu_p - \sum_{i=1}^{n} w_i\mu_i, 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i, \sum_{i=1}^{n} w_i - 1, -w_i\}$$

особливі, у певному розумінні, точки якої належать множині оптимальних за Слейтером розв'язків двокритеріальної задачі.

Метод можливих напрямків дещо поступається за точністю розв'язку іншим методам. Але він не вимагає досить точних початкових наближень для розв'язування задач і дозволяє дещо зменшити об'єм обчислень. Результати, одержані при розв'язуванні задач методом можливих напрямків можуть бути добрими початковими наближеннями для подальших розрахунків іншими методами.

Література

[1] Григорків В. С., Кушнірчук В. Й. Багатокритеріальна оптимізаційна модель з нелінійним еколого–економічним міжгалузевим балансом, Економічна кібернетика. 2003. – 3-4 (21-22). – С. 43-50.

Використання дробового броунівського руху в реальних задачах

Володимир Кушнірчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Фрактальний дробовий процес Вінера (ФДПВ) є узагальненням стандартного процесу Вінера (відомого також як броунівський рух) і використовується для моделювання складних випадкових процесів із фрактальними властивостями. Він є випадковим процесом, який об'єднує властивості дробового броунівського руху та фрактальності і може бути описаний як:

$$W_H(t) = \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{H-1/2} dW(s)$$

де $W(s)$ — стандартний процес Вінера (броунівський рух), а H — параметр Херста.

Цей процес має такі властивості: самоподібність (зміна масштабу часу не змінює статистичних властивостей процесу), автокореляція (присутня довгострокова залежність, що визначається параметром H), не-Марковськість (на відміну від стандартного процесу Вінера, цей процес не є Марковським, тобто його майбутнє не залежить лише від поточного стану, а також від усієї історії процесу).

Фрактальний дробовий процес Вінера використовується в різних галузях, включаючи фінансову математику, фізику та інші наукові дисципліни, де потрібне моделювання складних систем із фрактальними та довгостроковими залежностями.

Для моделювання ФДПВ можна використовувати такі методи та підходи: метод сум фракційних похідних, метод серійного підсумовування, метод Монте-Карло, Вейвлетний підхід, метод швидкого перетворення Фур'є. Основною метою є отримання траєкторій цього процесу для подальшого аналізу чи застосування в моделях.

Метод сум фракційних похідних базується на дискретизації процесу та використанні підсумовування фракційних похідних. Формула дискретного фрактального дробового процесу Вінера:

$$W_H(t_k) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \Delta W(t_k - t_j)$$

де $\Delta W(t_k - t_j)$ — прирости стандартного броунівського руху, а коефіцієнти a_j визначаються через параметр Херста H. Коефіцієнти a_j можуть бути визначені як:

$$a_j = \frac{(j+1)^{H-0.5} - j^{H-0.5}}{\Gamma(H+0.5)}$$

тут Γ — гамма-функція.

В процесі дослідження було проведено практичну реалізацію ФДПВ. Враховувались такі аспекти при реалізації: дискретизація (обирається певний крок часу для дискретизації процесу), генерація нормальних випадкових величин (використовуються генератори випадкових чисел для створення броунівського руху). Параметр Херста (задається значенням параметра H відповідно до потреб у моделюванні - самоподібність, довгострокова пам'ять тощо. Параметр Херста вибраний рівним $H = 0,5$.

Фрактальний дробовий процес Вінера і моделювання дробового броунівського руху мають широке застосування в різних галузях науки, техніки та фінансів. Зокрема, дробовий броунівський рух використовується для моделювання динаміки цін на фінансові активи, що може бути корисним для прогнозування цін акцій, облігацій, валютних курсів та інших фінансових інструментів. Дробовий процес Вінера використовується для моделювання складних природних явищ, таких як коливання температури, моделі турбулентності, розподіл землетрусів та інші кліматичні процеси. А також для моделювання мережевого трафіку, що корисно для аналізу трафіку в Інтернеті, моделювання затримок у мережах і прогнозування навантаження.

Дробовий броунівський рух використовується для опису аномальної дифузії в складних середовищах, таких як пористі матеріали або біологічні тканини. Довгострокові залежності в економічних даних можуть бути змодельовані за допомогою фрактальних процесів, що дозволяє краще розуміти динаміку економічних показників, таких як ВВП, інфляція, безробіття тощо. Фрактальні моделі можуть бути використані для моделювання поширення інформації або поведінки користувачів у соціальних мережах, де часто спостерігаються нелінійні та самоподібні явища.

Фрактальні властивості можуть бути використані для аналізу біологічних сигналів, таких як серцевий ритм або коливання концентрації певних речовин в організмі. Фрактальні моделі можуть допомогти в розумінні процесів росту пухлин, оскільки ці процеси часто мають складну, фрактальну природу.

Отже, моделювання фрактального дробового процесу Вінера є потужним інструментом у багатьох галузях, де необхідно враховувати складні, нелінійні залежності та самоподібні структури. Використовуючи ці моделі, можна отримати глибше розуміння процесів, які важко описати традиційними методами.

Література

[1] A. B. Dieker, Simulation of fractional Brownian motion, Master's thesis, Vrije Universiteit Amsterdam (2002, updated in 2004).

[2] Yu. Mishura, Stochastic calculus for fractional Brownian motion and

Застосування методу усереднення до інтегро-диференціальної задачі оптимального керування

Роксолана Лахва, Вікторія Могильова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені І. Сікорського"

Розглядається нелінійна задача оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(\frac{t}{\varepsilon}, x, \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \varphi(\frac{t}{\varepsilon}, s, x(s))ds, u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int\limits_0^T L(t, x_\varepsilon(t), u(t))dt + \phi(x_\varepsilon(T)) \to \inf. \tag{2}$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $T > 0$ - задана стала, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t)$ - m - вимірний вектор керування, який належить деякій множині в $\mathbb{R}^m$. Далі $x(t,u)$ - розв'язок задачі Коші (1)-(2), який відповідає керуванню $u(t)$. В подальшому залежність розв'язку від u будемо опускати і позначати $x(t)$. Введемо функцію

$$\varphi_1(t,x) = \int\limits_0^t \varphi(t,s,x)ds.$$

За умови існування рівномірних по $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in \mathbb{R}^m$ середніх

$$X_0(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t, x, \varphi_1(t,x), u)dt \tag{3}$$

задачі оптимального керування (1)-(2) зі швидкоосцилюючим коефіцієнтом ставиться у відповідність на відрізку $[0,T]$ більш проста задача оптмального керування

$$\dot{\xi} = X_0(\xi, u(t)) \tag{4}$$

$$\xi(0) = x_0$$

з критерієм якості

$$J_0[u] = \int\limits_0^T L(t, \xi(t), u(t))dt + \phi(\xi(T)) \to \inf. \tag{5}$$

Для задачі (1)-(2) будемо вважати, що виконуються наступні умови:

Умова 1. *Допустимими керуваннями є m-вимірні вектор-функції $u(\cdot)$ такі, що $u(\cdot) \in U$ - компактній множині в $L^2((0,T))$.*

Умова 2. *Функція $X(t,x,y,u)$ визначена та неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_0 = \{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^d, y \in D_1 \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m\}$, де D і D_1 області в $\mathbb{R}^d$ і $\mathbb{R}^m$ відповідно*

1) *$X(t,x,y,u)$ задовольняє по x, y в Q_0 умову лінійного росту, тобто існує стала $M > 0$, така що*
$$|X(t,x,y,u)| \le M(1+|x|+|y|)$$
для будь-яких $(t,x,y,u) \in Q_0$.

2) *$X(t,x,y,u)$ задовольняє в Q_0 умову Ліпшица за $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ і $u \in \mathbb{R}^m$ зі сталою λ, тобто*
$$|X(t,x,y,u) - X(t,x_1,y_1,u_1)| \le \lambda(|x-x_1|+|y-y_1|+|u-u_1|)$$
для довільних (t,x,y,u) і (t,x_1,y_1,u_1) в Q_0.

Умова 3. *Функція $\varphi(t,s,x)$ визначена та неперервна в області $Q_1 = \{t \ge 0, s \ge 0, x \in D\}$ і задовольняє умову Ліпшица по x*
$$|\varphi(t,s,x_1) - \varphi(t,s,x_2)| \le \mu(t,s)|x_1 - x_2|,$$
виконується умова для деякої сталої
$$\frac{1}{t}\int_0^t ds \int_0^s \mu(s,\tau)d\tau \le A,$$
де $A > 0$, $t \ge 0$.

Умова 4. *Рівномірно відносно $x \in D, u \in \mathbb{R}^m$ існує границя (3).*

Умова 5. *Функція $L(t,x,u)$ визначена й неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_2 = \{t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^m\}$, причому*

1) *$L(t,x,u)$ рівномірно відносно $t \in [0,T]$ і $u \in \mathbb{R}^m$ неперервна за $x \in \mathbb{R}^d$;*

2) *$L(t,x,u)$ задовольняє за змінною u в області Q_2 умову Ліпшиця з константою $\lambda > 0$;*

3) *функція $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ неперервна за x.*

В силу умов 1)-2) з Теореми 3.1 [1] маємо, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші на відрізку $[0,T]$. Нехай
$$J_\varepsilon^* = \inf_{u(\cdot)\in U} J_\varepsilon[u],$$
$$J_0^* = \inf J_0[u].$$
Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальними керуваннями, траєкторіями та критеріями якості точної (1)-(2) та усередненої (4)-(5) задач.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1 - 4. Тоді задачі (1)-(2) і (4)-(5) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$,$(y^*(t), u_*(t))$ відповідно. При цьому*

1) *$J_\varepsilon^* \to J_0^*$ при $\varepsilon \to 0$;*

2) *для довільного $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$*
$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| < \eta, \tag{6}$$
тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальне для точної;

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$*, така що*

$$x^*_{\varepsilon_n}(t) \to y^*(t) \quad (7)$$

рівномірно на $[0, T]$*, а*

$$u^*_{\varepsilon_n}(t) \to u^*(t) \quad (8)$$

в $L^2((0, T))$.

Якщо при цьому усереднена задача (4)-(5) має єдиний розв'язок, то збіжності (2) і (3) мають місце при всіх $\varepsilon \to 0$.

Література

[1] V. Mogylova, R. Lakhva, V.I.Kravets'. "The problem of optimal control for systems of integro-differential equations". Nonlinear oscillations, t. 26, N. 3, 2023, pp. 386-407. [Ukrainian language].

e-mail: roksolanalakhva@knu.ua, mogylova.viktoria@gmail.com

Існування розв'язку в задачі оптимального керування еволюційними функціонально-диференціальними рівняннями на півосі
Андрій Латиш, Ольга Кічмаренко,
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

Існування розв'язку в задачі оптимального керування еволюційними функціонально-диференціальними рівняннями на півосі

Андрій Латиш*, Ольга Кічмаренко**
** andrii.latysh@gmail.com, ** olga.kichmarenko@gmail.com*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Розглядається задача оптимального керування для еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь в банахових просторах на півосі. Задача розглядається до моменту виходу розв'язків із деякої області в банаховому просторі та має наступний вид:

$$\frac{du}{dt} = Au + f_1(t, u_t) + f_2(t, u_t)z(t)u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0] \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J[z] = \int_0^\tau \left(e^{-jt}G(t, u_t) + B(t, z(t))\right) dt \to \inf \tag{2}$$

або

$$J[z] = \int_0^\tau \left(e^{-jt}G(t, u_t) + \|z(t)\|^2\right) dt \to \inf \tag{3}$$

Тут $t \geq 0$, $h > 0$ — інтервал запізнення, A — лінійний (необмежений) оператор в банаховому просторі $X(A : X \to X)$ з нормою $\|\cdot\|$, $u_t = u(t + \Theta)$, $\Theta \in [-h, 0]$, u_t належить простору $C = C([-h, 0], X)$ неперервних функцій із стандартною нормою $\|\varphi\|_C = \max_{\Theta\in[-h,0]} \|\varphi(\Theta)\|$, D - деяка область в $[-h, \infty) \times C$, ∂D — її межа і $\bar{D} = D \cup \partial D$, τ — момент першого виходу розв'язку (t, u_t) на ∂D. Відображення f_1, f_2 визначенні в D і $f_1 : D \to X$, $f_2 : D \to \mathbb{L}(X, X)$, де $\mathbb{L}(X, X)$ — простір лінійних обмежених операторів, які діють із X в X, з нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}$, $z(t)$ — параметр керування.

Для задач (1),(2) і (1),(3) доведене існування оптимальної пари, достатні умови носять коефіцієнтний характер. Встановлені варіаційні співвідношення: доведена слабка збіжність оптимальних керувань, сильна збіжність оптимальних траєкторій, збіжність критеріїв якості задач на скінченних інтервалах до відповідних оптимальних керувань, оптимальних траєкторій і критерія якості задачі на півосі при збільшенні інтервала, на якому розгляжається задача.

Література

[1] Hale J. Theory of Functional Differential Equation. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

[2] Kichmarenko O., Stanzhytskyi O. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differentials equations, Nonlinear Dynamics and System theory, 2018, 18(2), pp. 196-211.

e-mail: andrii.latysh@gmail.com, olga.kichmarenko@gmail.com

Розв'язування задач математичної фізики методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Бесселя на сегменті

Олег Ленюк, Ольга Нікітіна, Микола Шинкарик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Чернівецький ліцей №1 математичного та економічного профілів

Західноукраїнський національний університет

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до розв'язування системи лінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики неоднорідних середовищ є метод гібридних інтегральних перетворень, який розвивався професором Чернівецького національного університету Ленюком Михайлом Павловичем, а тепер продовжує розвиватися його учнями [1-4].

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_2 = \{(t, r) : t > 0, r \in I_2\},\ I_2 = (0; R_1) \cup (R_1; R_2)$$

розв'язку лінійної системи двох рівнянь з частинними похідними

$$L_t[u_1] + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B^*_{\alpha_1}[u_1] = f_1(t, r),\ r \in (0; R_1),$$

$$L_t[u_2] + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_2] = f_2(t, r),\ r \in (R_1; R_2), \tag{1}$$

з відповідними початковими умовами, крайовими умовами та умовами спряження [3-4].

Тут беруть участь диференціальні оператори другого порядку Ейлера $B^*_{\alpha_1}$ та Бесселя B_{ν,α_2} [3].

Якщо $L_t = \frac{d}{dt}$, то ми маємо задачу теплопровідності або дифузії, якщо $L_t = \frac{d^2}{dt^2}$, то маємо задачу динаміки.

Усі параметри та оператори, які беруть участь у постановці крайової задачі для системи (1), описані у працях [1,2].

У препринті [2] побудовані пряме та обернене гібридні інтегральні перетворення Ейлера-Бесселя, породжені на множині I_2 гібридним диференціальним оператором $M_{(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B^*_{\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}$, а також доведена теорема про основну тотожність цього оператора.

Пряме гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя на двоскладовому сегменті з точкою спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць. При цьому використовуємо крайові умови та умови спряження.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого (для задачі дифузії) або другого (для задачі динаміки) порядку. Розв'язок такої задачі будується стандартним чином.

Обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних елементарних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

У праці [3] побудовано розв'язок задачі динаміки на двоскладовому сегменті $[0; R_2]$ з однією точкою спряження методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Бесселя.

У праці [4] побудовано розв'язок задачі дифузії на двоскладовому сегменті $[0; R_2]$ з однією точкою спряження методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Бесселя.

Література

[1] Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.

[2] Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01-08).

[3] Блажевський С.Г., Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І. Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя на сегменті // Прикладні питання математичного моделювання. Т.4, № 2.1. - Херсон: ХНТУ, 2021. - С. 25-31.

[4] Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І. Моделювання дифузійних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя на сегменті // Прикладні питання математичного моделювання. Т.6, № 2. - Херсон: ХНТУ, 2023. - С. 76-81.

e-mail: o.lenyuk@chnu.edu.ua, o.nikitina.chv@gmail.com, shynkaryk_m@ukr.net

Про деякі метричні результати задані в термінах ланцюгового A_2-представлення з алфавітом $\{0,5;1\}$

Олег Макарчук

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Відомо [1], що для кожного числа $t \in [0,5;1]$ існує послідовність (a_n) кожен член якої рівний $0,5$ або 1 і відповідно $t = [a_1;...;a_k;...]$ (квадратні дужки символізують ланцюговий дріб). Останнє зображення називається ланцюговим A_2-зображенням з алфавітом $\{0,5;1\}$. Деяка зчисленна множина (A_2-бінарних) чисел відрізку $[0,5;1]$ має відповідно два A_2-зображення виду $[a_1;...;a_n;\frac{1}{2};(\frac{1}{2},1)] = [a_1;...;a_n;1;(1,\frac{1}{2})]$, де круглі дужки символізують період. З іншого боку всі інші (A_2-унарні) числа відрізку $[0,5;1]$ мають єдине A_2-зображення. Нехай $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)$ — послідовність підхідних дробів, що відповідають числу x, $\Delta_n(x)$ — множина всіх чисел, перші n цифр яких співпадають з відповідними n цифрами числа x (циліндр n-го рангу). Наступна теорема є аналогом результатів робіт [2, 4] відповідно до класичних ланцюгових дробів.

Теорема 1. *Позначимо*

$$G = -\frac{Li_2(-t) - Li_2\left(-\frac{t}{2}\right) + \ln(x)\cdot\ln(x+1) - \ln(x)\cdot\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}\Bigg|_{0,5}^{1} \approx 0,3337,$$

де $Li_2(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k^2}$ *— полілогарифм. Для майже всіх чисел* $x \in [0,5;1]$ *виконуються умови*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n} = e^G \approx 1,3961,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lambda(\Delta_n)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|} = e^{-2G} \approx 0,5134.$$

Література

[1] Дмитренко С, Кюрчев Д, Працьовитий М. *Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія*, Укр.мат.журнал, **61**,№4, 452–463, (2009).

[2] Khintchine A. *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Math. France, **1**, 361–382 (1935).

[3] Levy P. *Sur les lois de probabilite dont dependent les quotients complets et incomplets dune fraction continue*, Bull. Soc. Math. France, **57**, 178–194 (1929).

e-mail: makolpet@gmail.com, makarchuk@imath.kiev.ua

Ергодичні властивості однієї динамічної системи заданої в термінах ланцюгового A_2-представлення чисел відрізку $[0,5;1]$

Олег Макарчук, Дмитро Скакун, Вадим Халецький
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

Відомо [1], що кожне число t відрізку $[0,5;1]$ за виключенням деякої зчисленної множини C допускає єдине ланцюгове зображення вигляду $t = [a_1; ...; a_k; ...]$, де кожен член послідовності (a_n) рівний $0,5$ або 1. Числа множини C називаються A_2-бінарними і мають вигляд $[a_1; ...; a_n; \frac{1}{2}; (\frac{1}{2}, 1)] = [a_1; ...; a_n; 1; (1, \frac{1}{2})]$, де круглі дужки означають період.

На множині ланцюгових A_2-зображень розглянемо оператор

$$T([a_1; a_2; ..., a_n; ...]) = [a_2; a_3; ...; a_{n+1}; ...],$$

причому для A_2-бінарних чисел будемо використовувати зображення з періодом $(\frac{1}{2}, 1)$. Нехай $\eta(\cdot)$ — міра Лебега-Стілтьєса, що відповідає функції

$$f^*(t) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}.$$

Теорема 1. *Позначимо*

$$G = -\frac{Li_2(-t) - Li_2\left(-\frac{t}{2}\right) + \ln(x)\cdot\ln(x+1) - \ln(x)\cdot\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}\Bigg|_{0,5}^{1} \approx 0,3337,$$

де $Li_2(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2}$ *— полілогарифм.*

Динамічна система $W = ([0,5;1]; B([0,5;1]); \eta(\cdot); T)$ *ергодична [2], тобто для кожної множини* $D \in B([0,5;1])$ *виконується рівність* $\eta(T^{-1}(D)) = \eta(D)$ *і для кожної інваріантної множини* Q $(T^{-1}(Q) = Q)$ *виконується умова* $\eta(Q) \in \{0;1\}$, *причому ентропія (метрична ентропія [3]) відповідної динамічної системи рівна*

$$h(W) = 2G \approx 0,6674.$$

Література

[1] Дмитренко С, Кюрчев Д, Працьовитий М. *Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія*, Укр.мат.журнал, **61**,№4, 452–463, (2009).

[2] Billigsley P. *Ergodic theory and information*, Wiley, 1965. – 207 p.

[3] Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995. – 773 p.

e-mail: makolpet@gmail.com, makarchuk@imath.kiev.ua, skakund2020@gmail.com, chaletskiyv@meta.ua

Асимптотична поведінка деяких типів розв'язків одного класу систем диференціальних рівнянь

Олександр Максимов

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = p_1(t)x^{\sigma_1} + q_1(t)e^{\lambda_1 y} = 0, \\ y' = p_2(t)x^{\sigma_2} + q_2(t)e^{\lambda_2 y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де σ_i, λ_i, $(i = 1, 2)$ – додатні сталі, $p_i, q_i : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, 2)$ - неперервні функції.

Розв'язком системи (1) називається пара функцій $(x(t), y(t))$, визначених на проміжку $[t_0, +\infty[$ $(t_0 \geq a)$, що тотожньо задовольняє систему. Згідно з виглядом системи (1) кожна компоненти будь-якого розв'язку $(x(t),\ y(t))$ системи (1) така, що виконується одна з двох умов

$$(I) \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = c > 0, \quad \text{або} \quad (II) \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0;$$

$$(I) \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = d > 0, \quad \text{або} \quad (II) \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

В роботі досліджуються питання про існування у системі (1) і асимптотичну поведінку при $t \to +\infty$ розв'язків наступних типів

$$(I, I); \quad (II, II); \quad (I, II); \quad (II, I),$$

де перша цифра у дужках вказує поведінку першої компоненти розв'язку системи (1), а друга - другої компоненти розв'язку.

У випадку системи зі степеневими нелінійностями, а саме системи виду

$$\begin{cases} x' = p_1(t)x^{\sigma_1} + q_1(t)y^{\lambda_1} = 0, \\ y' = p_2(t)x^{\sigma_2} + q_2(t)y^{\lambda_2} = 0, \end{cases}$$

де σ_i, λ_i, $(i = 1, 2)$ – додатні сталі, $p_i, q_i : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, 2)$ - неперервні функції, дані питання раніше вирішувались в роботах [1],[2].

1. Jaros, J., Kusano, T., Existence and precise asymptotic behavior of strongly monotone solutions of systems of nonlinear differential equations, Differ. Equ. Appl. 5 (2013), 185–204.
2. Evtukhov, V. M., Vladova, E. S., Asymptotic representations of solutions of essentially nonlinear cyclic systems of ordinary differential equations, Differ. Equ. 48 (2012), 630-646.

e-mail: 2162237@gmal.com

Стохастичні еволюційні рівняння у нескінченновимірних просторах

Ольга Мартинюк, Олександр Станжицький
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Робота присвячена розгляду загальних питань стосовно стохастичних рівнянь у нескінченновимірних просторах. Їх частинним випадком є стохастичні диференціальні рівняння у частинних похідних, що виступають математичними моделями багатьох реальних процесів.

У самій загальній постановці такі рівняння мають наступний вигляд.
Нехай H є сепарабельним гільбертовим або банаховим простором, і нехай задано абстрактне відображення $F : [0,T]\times H\times U \to H$, де $T > 0$ і U деякий простір Гільберта. Тоді стохастичне еволюційне рівняння має вигляд

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t), \dot{W}(t)), \tag{1}$$

де $\dot{W}(t), \quad t \in [0,T]$ є $U-$ значним білим шумом, а $W(t)$ є $U-$ значним циліндричним процесом броунівського руху на деякому ймовірнісному просторі (Ω, F, P). Оскільки $\dot{W}(t)$ є гаусівським процесом з незалежними значеннями із нескінченною дисперсією, то права частина (1) зазнає випадкових збурень дуже складної природи і не піддається вивченню сучасними математичними методами. Як правило, розглядається лінеаризована версія (1) отримана розкладом F в околі $0 \in U$ за формулою Тейлора:

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X, 0) + \partial_3 F(t, X, 0)W, \tag{2}$$

∂_3- частинна похідна від F по третій змінній.
Поклавши тепер $A(t, x) := F(t, x, 0), B(t, x) := \partial_3 F(t, X, 0)$
отримуємо об'єкт нашого розгляду

$$dX(t) = A(t, X)dt + B(t, x)dW(t). \tag{3}$$

В роботі розглядаються різні підходи до означення розв'язку (м'який, слабкий, сильний), обговорюється їх взаємозв'язок, приведені відповідні теореми існування.

Для конкретних виглядів просторів та нелінійних відображень A і B обговорюються конкретні рівняння, що є математичними моделями різних процесів природознавства (рівняння реакції дифузії, рівняння Бюргерса, рівняння Нав'є-Стокса, рівняння пористих середовищ, рівняння тонких плівок та інші). Загальна форма перерахованих рівнянь із фазовим простором функцій $\xi \to x(\xi)$, де $\xi \in D \subset R^d$ наступна

$$dX(t)(\xi) = A(t)X(t)(\xi), D_\xi X(t)(\xi), D^2_\xi(X(t)(\xi))dt+$$

$$+B(t, X(t)(\xi), D_\xi X(t)(\xi), D^2_\xi(X(t)(\xi))dW(t),$$

що є частинним випадком рівняння типу (3).

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект №2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

Література

[1] W. Lin, M. Rockner. *Stochastic Partial Differential Equations:* An introduction, Springer, Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015, 267 p.

e-mail: o.martynyuk@chnu.edu.ua, stanzhytskyi@knu.ua

Побудова матриці результатів команди. Ігрова дія атакувальний удар

Сергій Мартинюк, Вячеслав Цуркан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Побудова математичної моделі командних дій за статистичними даними, зібраними за допомогою програмного забезпечення DataVolley [1], дасть змогу суттєво вплинути на досягнення командних результатів у сучасному волейболі. Аналітична тренерська група, маючи доступ до математичної моделі командної гри, зможе використовувати її для аналізу індивідуальних дій гравців, оцінювати їх сильні та слабкі сторони, ефективність виконання ігрових компонент і взаємодію з партнерами. Крім аналізу, це дозволить продуктивно будувати тренувальний процес для підвищення ефективності командної гри [2].

У попередніх дослідженнях було розкодовано файли статистики та сформовано структуру бази даних для подальшої обробки результатів. Для проведення дослідження зібрано файли даних матчів сезону 2023-2024 років для команд Вищої ліги Чемпіонату та Кубку України серед жіночих команд. Було введено поняття матриці результатів ігрових дій [3].

Матриця результатів – це матриця розмірністю 3×3, кожен з елементів якої відповідає зоні ігрового поля у волейболі, а значення елементів матриці – кількості виконання ігрової дії в конкретній зоні:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ відповідні зони волейбольного поля } \begin{matrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 1 \end{matrix}.$$

Тобто гравець виконав 20 атакувальних ударів з 4 зони ігрового поля, 1 з 3, 1 з 2 та 3 з 5 зони.

Отже, для кожного гравця сформовані матриці результату ігрової дії "атакувальний удар". Відповідну матрицю позначимо A№гравця (наприклад, $A9$). Дана матриця складається з суми матриць результату якості ігрової дій: виграних атакуючих ударів $A9_1$, помилкових атакуючих ударів $A9_2$, позитивних ударів $A9_3$ та негативних ударів $A9_4$:

$$A9 = A9_1 + A9_2 + A9_3 + A9_4.$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Крім того, для деталізації напрямків атаки до кожного елемента матриці результатів прив'язується матриця результату напрямку атаки:

$$A9_{4\text{dir}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad A9_{3\text{dir}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A9_{2\text{dir}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A9_{8\text{dir}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відносні матриці результату показують якість атакуючого удару:

$$A9\%_1 = \begin{pmatrix} 15 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A9\%_2 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A9\%_3 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A9\%_4 = \begin{pmatrix} 65 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для побудови матриці результатів команди ігрової дії "атакувальний удар" ми використовуємо матриці результатів кожного гравця та розташування гравців на майданчику. Гравець може займати позицію або передньої лінії (зони 2, 3, 4), або задньої лінії (зони 1, 6, 5). В залежності від розміщення до результуючої матриці включаємо суму відповідних елементів першого рядка матриць результатів гравців передньої лінії та другого та третього рядків для гравців задньої лінії.

Сформовані матриці результатів атакувальних дій для всіх гравців за останні 5 офіційних матчів:

$$A7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A9 = \begin{pmatrix} 96 & 3 & 12 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A1 = \begin{pmatrix} 0 & 67 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A8 = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 69 \\ 0 & 3 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A10 = \begin{pmatrix} 82 & 2 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A2 = \begin{pmatrix} 2 & 48 & 16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для прикладу розглянемо розташування команди (по номерах гравців і зонах відповідно):

$$7\ \ 9\ \ 1\ \ 8\ \ 10\ \ 2.$$

Результуюча матриця для даного розташування: $A^1 = \begin{pmatrix} 130 & 70 & 93 \\ 1 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ тобто перший рядок формується з відповідних рядків гравців з номерами 9, 1, 8 (гравці передньої лінії), два наступні рядки – з відповідних рядків гравців з номерами 7, 10 та 2 (гравці задньої лінії). При зміні розташування матриця результату команди змінюється відповідно до нового розташування (9 1 8 10 2 7):

$$A^2 = \begin{pmatrix} 116 & 69 & 89 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті отримаємо 6 матриць, для кожного розташування. Відмітимо, що тут враховано, що гравцям задньої лінії заборонено атакувальний удар з передньої лінії. Побудовані за таким самим принципом матриці якості атакувального удару та відносні матриці якості дають змогу передбачити найімовірнішу зону атакувального удару команди. Матриці напрямку для команди формуються аналогічно та відображають напрямок атаки з певної зони.

Для побудова математичної моделі команди необхідно сформувати матриці результату та відповідні матриці напрямку та якості для всіх ігрових дій. Основними ігровими діями у волейболі є: подача (Serve, позначатимемо матриці результату S), прийом (Reception – R), атака (Attack – A), блок (Block – B), прийом атаки (Dig – D), пас (sEt – E), вільний м'яч (Free ball – F). Для об'єктивності моделі побудову даних матриць варто здійснювати за файлами статистики не одного матчу, а щонайменше 3-4 матчів.

Завдяки побудованим матрицям результатів можна аналізувати ігрову дію "атакувальний удар" команди та прогнозувати її по якості та напрямку. Для покращення якісних показників команди в цілому можна скористатися попереднім дослідженням по використанню Т-критерію Вілкоксона для оцінки якісний змін [4]. Збір даних по проведених матчах команд дасть змогу постійно оновлювати дані гравців та робити їх актуальними.

Література

[1] Data Volley. (f.a.). Data Volley. – URL: https://www.dataproject.com/Products/EN/en/Volleyball/Dat

[2] COACHING MANUAL. (2018). – URL: https://volleyball.org.au/get-involved/coaching-refereeing/coaching/coach-resources/volleyball-australia-coaching-manual

[3] Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав "Побудова математичної моделі гравця з використанням матриці результатів", ЗБІРНИК СТАТЕЙ, "Математика. Інформаційні технології. Освіта", №11 (2024), м. Луцьк, С. 86.

[4] Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав. Математична модель оцінки якісних змін виконання командних дій на основі Т-критерію Вілкоксона. Буковинський матем. журнал, 2023, Т.11, №2, С. 1-7.

e-mail: s.martyniuk@chnu.edu.ua, tsurkan.viacheslav.i@chnu.edu.ua

Моделювання процесів збору врожаю в дискретних системах

Василь Маценко
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Більшість математичних моделей екології формулюються у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь. Підхід, що базується на апараті диференціальних рівнянь, застосовується до моделювання динаміки чисельності популяцій із перекривними поколіннями. Однак, для багатьох популяцій послідовні покоління не перекриваються і ріст чисельності відбувається в дискретні моменти часу. До таких популяцій можна віднести багато видів комах. Такі моделі пов'язують чисельність N_{t+1} у момент часу $t+1$ із чисельністю в попередні моменти. Це призводить до розгляду різницевих рівнянь, які в простішому випадку мають вигляд

$$N_{t+1} = F\left(N_t\right), \quad N_t \in \mathrm{R}^+, \ F : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+, \ \mathrm{R}^+ = [0, \infty). \tag{1}$$

На практиці розв'язок (1) можна знайти шляхом ітерування (аналітичний розв'язок, як правило, не можна знайти). В аналітичному виді знаходять стаціонарні та періодичні розв'язки рівняння (1) і досліджують їх на стійкість.

Оскільки в своїй діяльності людина використовує різні природні ресурси, то важливим є раціональне використання відновлювального ресурсу. Якщо з деякої популяції відловлюється певна кількість особин, то рівняння (1), яке описує зміну чисельності популяції, набуває вигляду

$$N_{t+1} = F\left(N_t\right) - C\left(N_t, \alpha\right), \tag{2}$$

де $C\left(N_t, \alpha\right)$ – інтенсивність відлову, параметр α характеризує цю інтенсивність.

У даній роботі зі збором урожаю розглядаються дискретна логістична модель, модель Рікера [1] та моделі Скеллама.

Для дискретного логістичного рівняння

$$N_{t+1} = rN_t\left(1 - N_t\right) - c \tag{3}$$

з постійною інтенсивністю відбору знайдено стаціонарні стани, періодичні розв'язки з періодом $T = 2$ та $T = 3$ та проведено дослідження їх стійкості. Зроблено комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (3) при різних значеннях r, c.

Для моделі Рікера зі збором урожаю

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)\right) - c \tag{4}$$

чисельно знайдені стани рівноваги чисельності. Показано, що існує нижня межа, перейшовши яку, приречуємо популяцію на вимирання.

Комп'ютерний аналіз рівняння (4) при $k = 10$, $r = 2.2$, $c = 0.5$ дає існування стійкого періодичного розв'язку з періодом $T = 2$ ($N_1^* = 4.838$, $N_2^* = 14.561$).

Числовий аналіз рівняння (4) при $k = 10$, $r = 3.2$, $c = 0.4$ показав, що існують два нестійких періодичних розв'язки з періодом $T = 3$. Тоді за теоремою Шарковського рівняння (4) має періодичні розв'язки будь-якого періоду, а за теоремою Li Yorke існують хаотичні розв'язки (при $k = 10$, $r = 3$, $c = 0.5$).

Якщо коефіцієнт розмноження в популяції, тобто відношення $\dfrac{N_{t+1}}{N_t}$ вибрати у вигляді монотонно спадної гіперболічної функції, то одержується модель Скеллама, яка зі збором урожаю з постійною інтенсивністю c має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t} - c,$$

або

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{1 + bN_t^2} - c, \quad a, b, c > 0, \ t = 0, 1, 2, \ldots$$

Для цих моделей показано, що має місце монотонна стабілізація чисельності, періодичні розв'язки відсутні.

У результаті досліджень виявилось, що модель Скеллама має узагальнення, які допускають існування періодичних розв'язків різного періоду.

Така модель з м'якою стратегією збору врожаю має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{\alpha N_t}{\beta + N_t^3} - kN_t, \quad \alpha, \beta > 0, \ k \in (0,1), \ t = 0, 1, 2, ...$$

Для цієї моделі знайдені стаціонарні та періодичні розв'язки. Проведено дослідження їх стійкості та комп'ютерний аналіз розв'язків.

Література

[1] Маценко В.Г. Моделювання процесів збору врожаю для популяції з неперекривними поколіннями. Буковинський математичний журнал. 2022. 10(2). 165–175.

e-mail: v.matsenko@chnu.edu.ua

Представлення дійсних чисел знакозмінними рядами Перрона та його місце серед відомих представлень

Микола Мороз

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Означення 1. *Знакозмінним рядом Перрона будемо називати числовий ряд виду*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r_0 r_1 \cdots r_n}{(q_1-1)q_1(q_2-1)q_2\cdots(q_n-1)q_n(q_{n+1}-1)}\ , \tag{1}$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ *— довільна послідовність натуральних чисел,* $\mathbb{N} \ni q_n \geq r_{n-1}+1$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$.

Лема 1. *Ряд* (1) *є абсолютно збіжним, а його сума є числом з інтервалу* $(0,1)$.

Нехай задано функції $\varphi_n(x_1,\ldots,x_n)\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ та $\varphi_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{N}$. Фіксовану послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ позначатимемо P.

Означення 2. *Нехай число* $x \in (0,1)$ *є сумою ряду* (1), *де* $r_0 = \varphi_0$ *та* $r_n = \varphi_n(q_1,\ldots,q_n)$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді розклад числа* x *в ряд* (1) *будемо називати його* P^-*-представленням. Скорочено ряд* (1) *та його суму* x *будемо позначати* $\Delta^{P^-}_{q_1q_2\ldots}$. *Число* q_n *будемо називати* n*-ою цифрою* P^-*-представлення числа* x.

Означення 3. *Непорожню множину* $\Delta^{P^-}_{c_1\ldots c_k} = \left\{x \in (0,1)\colon x = \Delta^{P^-}_{c_1\ldots c_k q_{k+1} q_{k+2}\ldots}\right\}$ *будемо називати* P^-*-циліндром рангу* k *з основою* $c_1\ldots c_k$.

Множину інфімумів та супремумів всіх P^--циліндрів позначимо IS^{P^-}. Ця множина є зліченною та всюди щільною в $[0,1]$. Жодне число з IS^{P^-} не має свого P^--представлення.

Теорема 1. *Для довільної послідовності* P *кожен* $x \in (0,1) \setminus IS^{P^-}$ *має єдине* P^-*-представлення, тобто існує єдина послідовність натуральних чисел* $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ *така, що*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r_0 r_1 \cdots r_n}{(q_1-1)q_1\cdots(q_n-1)q_n(q_{n+1}-1)} \equiv \Delta^{P^-}_{q_1q_2\ldots},$$

де $r_0 = \varphi_0$, $r_n = \varphi_n(q_1,\ldots,q_n)$ *та* $q_n \geq r_{n-1}+1$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$.

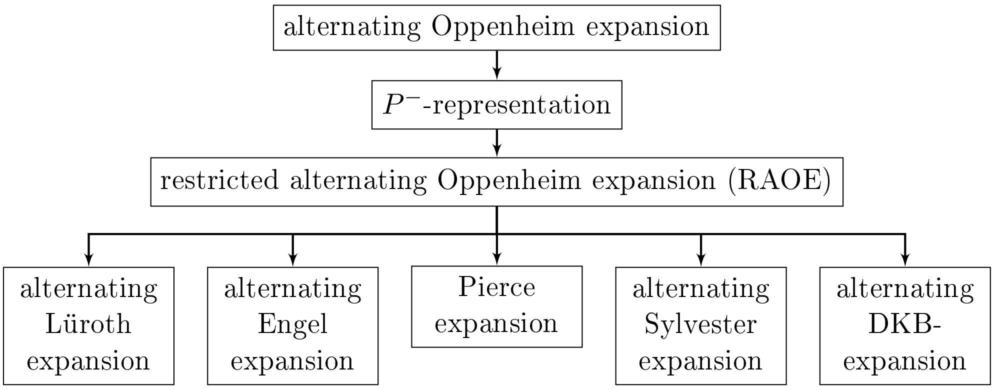
Наслідок 1. *Циліндр* $\Delta^{P^-}_{q_1\ldots q_n}$ *є множиною виду* $(a,b) \setminus IS^{P^-}$.

Теорема 2. *Нехай* P^-*-представлення визначене послідовністю* P *функцій* $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$. *Тоді для кожного* $x \in (0,1) \setminus IS^{P^-}$ *мають місце рекурентні співвідношення:*

$$\begin{aligned}
&r_0 = \varphi_0; \quad q_1(x) = \left[\frac{r_0}{x}\right] + 1;\\
&x_k = \left| x - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n r_0\cdots r_n}{(q_1-1)q_1\cdots(q_n-1)q_n(q_{n+1}-1)} \right|;\\
&r_k = \varphi_k(q_1,\ldots,q_k);\\
&q_{k+1}(x) = \left[\frac{r_0\cdots r_k}{(q_1-1)q_1\cdots(q_k-1)q_k x_k}\right] + 1,
\end{aligned}$$

де $[x]$ *— ціла частина числа* x.

P^--представлення є узагальненням представлень дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота [2], рядами Остроградського–Серпінського–Пірса [1, 7], Остроградського другого виду [8], знакозмінного DKB-представлення [3], а також є знакозмінним аналогом представлення дійсних чисел додатними рядами Перрона [5] (узагальнення рядів Люрота, Енгеля, Сильвестера тощо). При цьому на сьогодні P^--представлення є найбільш загальним частковим випадком знакозмінних розкладів Оппенгейма [3, 4], для якого майже всі числа з $(0,1)$ мають своє відповідне представлення.



Дана доповідь присвячена основам тополого-метричної теорії P^--представлення, а також зв'язкам P^--представлення з добре відомими представленнями дійсних чисел за допомогою знакозмінних рядів.

Література

[1] О.М. Барановський, М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін. *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування.* – Київ: Наукова Думка, 2013. – 288 с.

[2] М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна. *Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування* // Науковий часопис Нац. пед. універ. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 11. – С. 102–118.

[3] J. Galambos, I. Kátai, and M. Y. Lee, *Metric properties of alternating Oppenheim expansions*, Acta Arithmetica 109 (2003), 151–158.

[4] A. Knopfmacher and J. Knopfmacher, *Two constructions of the real numbers via alternating series*, Int. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), 603–613.

[5] M. Moroz, *Representation of Real Numbers by Perron Series, Their Geometry, and Some Applications*, J Math Sci 279 (2024), 384–399.

[6] M. Moroz, *Representation of Real Numbers by Alternating Perron Series and Their Geometry*, preprint at `https://arxiv.org/pdf/2408.01465` (2024).

[7] J.O. Shallit, *Metric theory of Pierce expansions*, The Fibonacci Quarterly 24 (1986), 22–40.

[8] G. Torbin and I. Pratsyovyta, *Singularity of the second Ostrogradskiĭ random series*, Theor. Probability and Math. Statist. 81 (2010), 187–195.

e-mail: moroznik22@gmail.com

Топологічна характеризація різних типів квазіметричних просторів

Володимир Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Наступні поняття для частково метричних просторів були уведені в [1], але ми тут розглянемо їх у загальнішій ситуації квазіметричних просторів.

Означення 1. *Квазіметричний простір* (X, q) *називається*

- *секвенціально рівнобедреним, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} q(y, x_n) = q(y, x)$ *для довільних* $y \in X$ *і збіжної до точки* $x \in X$ *послідовності точок* $x_n \in X$*;*

- *секвенціально рівностороннім, якщо послідовність точок* $y_n \in X$ *збігається до точки* $x \in X$*, як тільки існує така збіжна до* x *послідовність точок* $x_n \in X$*, що* $\lim\limits_{n\to\infty} q(y_n, x_n) = 0$*;*

- *секвенціально симетричним, якщо послідовність точок* $x_n \in X$ *збігається до точки* $x \in X$*, як тільки* $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$*;*

- *метрикоподібним, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$ *для довільної збіжної до точки* $x \in X$ *послідовності точок* $x_n \in X$*.*

Як зауважили автори в [1], поклавши $x_n = x$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ в означенні секвенціально рівностороннього простору (X, q), ми одержимо, що послідовність точок $y_n \in X$ збігається до точки $x \in X$, як тільки $\lim\limits_{n\to\infty} q(y_n, x) = 0$, тобто має місце наступна імплікація.

Proposition 1. *Кожний секвенціально рівносторонній квазіметричний простір є секвенціально симетричним.*

Разом з тим, автори в [1, Question 8.5] сформулювали таке питання.

Питання 1. *Якими є подальші зв'язки між поняттями з означення 1 для частково метричних просторів?*

У роботі [2] фактично одержано наступний результат, хоча він і сформульований для частково метричних просторів, але його доведення залишається вірним і для квазіметричних просторів.

Теорема 1. *Нехай* (X, q) *– квазіметричний простір. Тоді*

(1) якщо X *метрикоподібний, то* X *секвенціально рівнобедрений;*

(2) якщо X *метрикоподібний і секвенціально симетричний, то* X *секвенціально рівносторонній.*

Для квазіметричного простору (X, q) через τ_q ми позначаємо топологічну структуру, породжену цією квазіметрикою, через q^{-1} – спряжену квазіметрику на X, тобто $q^{-1}(x, y) = q(y, x)$, і через d_q – метрику $q + q^{-1}$ на X.

Наступні топологічні характеризації різних типів квазіметричних просторів одержано в [3].

Теорема 2. *Нехай* (X, q) *– квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X, q) *секвенціально рівнобедрений;*

(ii) квазіметрика q *є* τ_q*-неперервною відносно другої змінної;*

(iii) для довільних $x \in X$ *і* $r > 0$ *замкнена куля* $B[x, r] = \{y \in X : q(x, y) \leq r\}$ *є замкненою множиною.*

Якщо квазіметрика q породжена деякою частковою метрикою p на X, то умови $(i)-(iii)$ рівносильні також такій умові

(iv) часткова метрика p є нарізно τ_q-неперервною.

Теорема 3. *Нехай (X,q) – квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X,q) секвенціально рівносторонній;

(ii) $q(A,B)>0$ для довільних непорожніх неперетинних у квазіметричному просторі (X,q) замкненої множини A і зліченно компактної множини B.

Теорема 4. *Нехай (X,q) – квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X,q) метрикоподібний;

(ii) топологія τ_q є сильнішою, ніж топологія $\tau_{q^{-1}}$;

(iii) топологія τ_q збігається з топологією τ_{d_q};

(iv) квазіметрика q є неперервною відносно топології добутку двох просторів (X,τ_q);

(v) квазіметрика q є τ_q-неперервною відносно першої змінної;

(vi) квазіметрика q є τ_q-неперервною відносно першої змінної у всіх точках діагоналі $\Delta=\{(x,x): x\in X\}$;

Теорема 5. *Нехай (X,q) – квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X,q) секвенціально симетричний;

(ii) топологія $\tau_{q^{-1}}$ є сильнішою, ніж топологія τ_q;

(iii) топологія $\tau_{q^{-1}}$ збігається з топологією τ_{d_q};

(iv) квазіметрика q є неперервною відносно топології добутку двох просторів $(X,\tau_{q^{-1}})$;

(v) квазіметрика q є $\tau_{q^{-1}}$-неперервною відносно другої змінної;

(vi) квазіметрика q є $\tau_{q^{-1}}$-неперервною відносно другої змінної у всіх точках діагоналі $\Delta=\{(x,x): x\in X\}$;

Наслідок 1. *Квазіметричний простір (X,q) метрикоподібний і секвенціально симетричний тоді і тільки тоді, коли на X топології просторів (X,q), (X,q^{-1}) і (X,d_q) збігаються.*

Література

[1] S.Han, J.Wu, D.Zhang *Properties and principles on partial metric spaces*, Topology and its Applications, **230** (2017), 77-98.

[2] Lu H., Zhang H., He W. *Some remarks on partial metric spaces*, Bull. Malays. Math. Soc. **43 (3)** (2020) 3065-3081.

[3] Мироник В., Михайлюк В. *Різні типи квазіметричних і частково метричних просторів*, Бук. мат. журн. (2023), Т.11, №2, С.211-224.

e-mail: vmykhaylyuk@ukr.net

Одна стаціонарна задача дифракції пружної хвилі на сферичному дефекті

Олег Назаренко, Анжела Стехун, Анатолій Яровий

Одеська державна академія будівництва і архітектури, Одеса, Україна

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

Метою роботи є апробація методу розривних розв'язків на динамічних задачах дифракції пружних хвиль на сферичних об'єктах. Для цього слід побудувати розривний розв'язок хвильового рівняння [1, 2], а потім і тривимірних рівнянь руху пружного середовища для вказаного дефекту [4]. Потім, використовуючи отримане розривне рішення рівнянь руху пружного середовища, звести задачі пружних хвиль на сферичному дефекті до інтегральних рівнянь, в тому числі і задачі дифракції хвиль скручування. Розробити ефективний метод наближеного рішення інтегрального рівняння задачі дифракції хвиль скручування на нерухомому (рухомому) сферичному тонкому включенні (сегмент тонкої абсолютно жорсткої сферичної оболонки).

Методи дослідження базуються на відомому факті [3] про зведення задач коливань пружного середовища до визначення трьох функцій, які задовольняють хвильовим рівнянням у сферичній системі координат. І тому, для будування розривного рішення рівнянь руху пружного середовища, необхідно спочатку побудувати розривне рішення хвильового рівняння для сферичного дефекту [2]. Воно будується за допомогою узагальненої схеми методу інтегральних перетворень [1]. Потім, використовуючи метод необхідно вирішувати у класі функцій з неінтегрованими особливостями [4]. Щоб побудувати таке рішення методом інтегральних многочленів, було доведено і використано нове спектральне співвідношення для многочленів Якобі з неінтегрованими ваговими функціями. При цьому інтеграли від функцій з неінтегрованими особливостями розуміються в узагальненому (регуляризованому) змісті.

Наукова новизна роботи полягає в наступному:

1. Побудовано розривний розв'язок хвильового рівняння та тривимірних рівнянь руху теорії пружності для сферичного дефекту.

2. Здійснено зведення задач дифракції пружних хвиль довільної природи на сферичному дефекті до одновимірних інтегро-диференціальних (інтегральних) рівнянь в термінах перетворення Фур'є по куту φ :

$$R\Phi_n'(r,\theta)\big|_{r=R-0} + \nabla_n \Psi_{2n}(R-0,\theta) = -Ru_r^0(R,\theta),$$

$$\nabla_n \left\{ \Phi_n(R-0,\theta) - \left[r^2 \Psi_{2n}(r,\theta)\right]'\Big|_{r=R-0} \right\} = R\zeta_n^0(R,\theta),$$

$$\nabla_n \Psi_{1n}(R-0,\theta) = -\zeta_n^{0*}(R,\ \theta),\ 0 \le \theta \le \omega,$$

де $\Phi_n(r,\theta)$– функція, яка визначає хвилю розширення; $\Psi_{in}(r,\theta), i=\overline{1,2}$–функції, що описують хвилі зсуву; $u_{rn}^0(R,\theta),\ \zeta_n^0(R,\theta), \zeta_n^{0*}(R,\ \theta)$– зсув і напруження, відповідно, які викликає стаціонарна пружна хвиля, що падає на включення.

3. Побудовано ефективне наближене рішення задачі дифракції хвиль скручування $e^{-i\xi\cos\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\theta)(2k+1)e^{k\pi i/2}J_{k+1/2}(\xi)$, на абсолютно жорсткому нерухомому сферичному включенні з використанням нового спектрального співвідношення для многочленів Якобі з неінтегрованою вагою:

$$Y_j - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_l d_{jl}}{\sqrt{N_j N_l \sigma_j \sigma_l}} = \frac{F_j}{\sqrt{N_j \sigma_j}},\ j=0,1,\ldots,$$

де:

$$Y_j = \sqrt{N_j\sigma_j}X_{j+1};\ 2\sigma_l = \Gamma(l+1/2)\Gamma(l+3/2)[l!(l+1)!]^{-1};$$

$$N_l^{\alpha,\beta} = \Gamma(\alpha+l+1)\Gamma(\beta+l+1)[2(\alpha+\beta+2l+1)l!\Gamma(\alpha+\beta+2l+1)]^{-1};\ N_l^{0,1/2} \equiv N_l;$$

$$d_{jl} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(\xi) I_{1/2,0,0}^{k,j}(\beta) I_{-3/2,0,0}^{k,l+1}(\beta);\ I_{q,p,r}^{k,n}(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i(-i-r)_n \beta^{2(i+r)} c_i}{(i+r)!^{-1} n! \Gamma(2+n+i+r+q)};$$

$$c_i = \sum_{m=0}^{i} \left(\frac{(-k)_m}{m!}\right)^2 \frac{(1/2+k+p)_{i-m}}{(i-m)!},$$

$$\Delta_k(\xi) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin[(k+1/2)\theta]}{(-1)^k} \frac{\partial}{\partial\theta} \Upsilon_0\left(2\xi\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta;$$

$\Upsilon_0(z) = J_\nu(z) - iH_0(z)$; $H_0(z)$– перша функція Струве; самі коефіцієнти $\Delta_k(\xi)$ можна обчислити, використовуючи відомі степеневі розкладання для функцій Бесселя та Струве, а також табличних інтегралів;

$$\beta F_j = \frac{A_k(\xi)\sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[4i\xi I^{k,j}_{1/2,2,1}(\beta) - 2I^{k,j}_{1/2,1,0}(\beta) + 2I^{k,j}_{1/2,1,1}(\beta)\right]}{\left[(2k+1)e^{k\pi i/2} J_{k+1/2}(\xi)\right]^{-1}};\ A_k(\xi) = \frac{1-\Delta_k(\xi)}{2k+1}.$$

Література

[1] Popov G. Ya. Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect, Advances in Mechanics. – 1992. – 15, 1-2. – P. 71–110.

[2] Nazarenko O. A. Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect, Norwegian Journal of development of the International Science, ISSN 3453-9875, Oslo, Norway. – 2022. – No 87. – P. 3–5.

[3] Guz A. N., Kubenko A. V., Cherevko M. A. Diffraction of elastic waves, Kyiv: Naukova Dumka, 1978. – 308 c.

[4] Nazarenko O.A., Stehun A.O., Yarovy A.T. Diffraction of elastic waves on spherical defects,Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online), Uzhgorod «Hoverla» – 2023. – Vol.42, No 1. – P. 64–71.

e-mail: gelo.fabric@gmail.com, angela.stehun@gmail.com, jarovyiat@gmail.com

Про псевдоквазінеперервність та її аналоги

Василь Нестеренко
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Поняття квазінеперервності, яке було введене С.Кемпістим в [1], отримало багато аналогів. Одним з таких аналогів є псевдоквазінеперервність. Це поняття було введене в [2], що правда, спочатку воно фігурувало в деяких працях автора (див., наприклад, [3]) під назвою "топологічна кліковість". Для довільних топологічних просторів X та Y відображення $f : X \to Y$ називається *псевдоквазінеперервним*, якщо для довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільної множини E в X, таких, що $U \subseteq \overline{E}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$. Псевдоквазінеперервність є слабшою умовою ніж квазінеперервність, тобто кожне квазінеперервне відображення є псевдоквазінеперервним.

В праці [4] Я.Борсік та Й.Добош ввели поняття простої неперервності. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *просто неперервним*, якщо прообраз будь-якої відкритої множини є просто відкритою множиною, тобто є об'єднанням відкритої та ніде не щільної множин. Як було з'ясовано в [2], псевдоквазінеперервність та проста квазінеперервність означають одну і ту саму властивість відображень.

В згадані роботі [4] було встановлено результати про декомпозицію неперервності за участю псевдоквазінеперервності, точкової розривності та інших аналогів точкової розривності. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *точково розривним*, якщо його множина точок розриву $C(f)$ є всюди щільною в X.

Слід відзначити роботу [5], в якій наведено ряд декомпозиційних результатів для різних ослаблень неперервності за участю точкової розривності.

Ми досліджуємо зв'язок між псевдоквазінеперервністю та точковою розривністю.

Твердження 1. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперервне відображення. Тоді відображення f точково розривне.*

Зауважимо, що умова беровості простору X є істотною в твердженні 1.

Твердження 2. *Існує точково розривна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є псевдоквазінеперервною.*

1. Kempisty S. Sur les fuctions quasicontinues // Fund. Math. – 1932. – 19. – P. 184 - 197.

2. Nesterenko V. Separate and joint properties of some analogues of pointwise discontinuity // Tatra Mt. Math. Publ. – 2014. – 58. – P. 155 - 167.

3. Nesterenko V. On topological cliquishness // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology, May 27 – June 1, 2009" – Ivano-Frankivsk, 2009. – P.107 - 108.

4. Borsík J., Doboš J. On certain decompositions of continuity // Rend. Ist. Math. Univ. Trieste – 1988. – 20. – P. 275 – 282.

5. Сафонова О. Про точково розривні відображення зі значеннями в регулярних просотах // Буковинський математичний журнал. – 2018. – 6, 1-2. – С. 97 - 103.

e-mail: v.nesterenko@chnu.edu.ua

Про сукупну квазінеперервність многозначних відображень

Василь Нестеренко, Олена Фотій
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Поняття горизонтальної квазінеперервності, яке є узагальненням на топологічні простори властивості (A) з [1], застосовувалося в багатьох результатах для отримання сукупних властивостей відображень. Це стосувалося як однозначних відображень, так і многозначних.

В [2] було введено слабку горизонтальну квазінеперервність, що є більш ширшим поняттям ніж горизонтальна квазінеперервність. Відображення $f : X \times Y \to Z$ між топологічними просторами X та Y називається *слабко горизонтальноківазінеперервним*, якщо для довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та множини A в X, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.

Переносячи поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності на многозначні відображення ми отримуємо два поняття. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається:

- *слабко горизонтально квазінеперервним знизу в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $W \cap F(x_0, y_0) \neq \emptyset$, довільних околів U та V точок x та y відповідно в просторах X та Y існує відкрита непорожня множина G в X і відображення $g : G \to V$, такі, що $G \subseteq U$ і $W \cap F(x, g(x)) \neq \emptyset$ для всіх $x \in G$;

- *слабко горизонтально квазінеперервним зверху в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0, y_0) \subseteq W$, довільних околів U та V точок x та y відповідно в просторах X та Y існує відкрита непорожня множина G в X і відображення $g : G \to V$, такі, що $G \subseteq U$ і $F(x, g(x)) \subseteq W$ для всіх $x \in G$.

Тут ми узагальнюємо деякі результати з [3].

Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення. Відображення F квазінеперервне знизу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли F слабко горизонтально квазінеперервне зверху і знизу та F^x квазінеперервне знизу для всіх x з деякої залишкової множини в X.*

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне многозначне відображення. Відображення F квазінеперервне зверху за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли F слабко горизонтально квазінеперервне зверху і знизу та F^x квазінеперервне зверху для всіх x з деякої залишкової множини в X.*

1. Bögel K. Über partiell differenzierbare Funktionen // Math. Z. – 1926. – 25. – S. 490–498.
2. Нестеренко В. Слабка горизонтальна квазінеперервність // Математичний вісник НТШ. – 2008. – 5, – С. 177 - 182.
3. Fotij O., Maslyuchenko O., Nesterenko V. Characterization of quasi-continuity of multifunctions of two variables // Math. Slovaca. – 2016. – 66, 1. – P. 281 - 286.

e-mail: v.nesterenko@chnu.edu.ua, o.fotij@chnu.edu.ua

Задача Коші для одного виродженого рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і можуть зростати

Галина Пасічник, Ігор Мединський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

Нехай n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Розглядається в шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ задача Коші для рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1)\partial_{x_{1j}} - a_0(t, x_1)\right) u(t, x) = 0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) є виродженим рівнянням Колмогорова другого порядку, його коефіцієнти a_{js}, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n\}$, a_j, $j \in \{1, ..., n\}$, і a_0 не залежать від змінних виродження x_{2j}, $j \in \{1, ..., n_2\}$.

В [1] вивчено класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1) з обмеженими коефіцієнтами. У доповіді розглядаються задача Коші для рівняння, в якому коефіцієнти при $|x_1| \to \infty$ можуть зростати. Ріст коефіцієнтів рівняння та їх похідних підпорядковується росту деякої функції $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$, а коефіцієнти і їх похідні задовольняють локальну умову Гельдера рівномірно щодо $t \in [0, T]$. Детальна інформація про фундаментальний розв'язок задачі Коші, а саме про оцінки похідних за змінною x_1, дозволяє одержувати досить точні результати про розв'язки задачі Коші.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження задачі Коші для виродженого рівняння Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами та залежними від усіх просторових змінних.

1. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження// Буковинський мат. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 94–106.

2. *Пасічник Г.С.* Про фундаментальний розв'язок ультрапараболіч-ного рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і можуть зростати// Матеріали міжнар. наук. конф. "Прикладна математ. та інф. технології", присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математ. та інф. технологій, 22–24 вересня 2022 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. – С. 140–141.

e-mail: pasichnyk.gs@gmail.com, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua

Аналіз та апроксимація стохастичних диференціальних рівнянь з запізненням

Григорій Петрина, Василь Кравець

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, Україна

Ця робота присвячена розробці нових методів наближення для стохастичних систем з запізненням, що дозволяє забезпечити вищу точність та кращу адаптивність оцінок порівняно з існуючими методами. Подібні результати були отримані в роботі [1], де обговорюються підходи до апроксимації функціонально-диференціальних рівнянь. На відміну від цих досліджень, наша робота робить внесок у розуміння специфічних викликів, пов'язаних зі стохастичними аспектами систем із запізненням.

Розглядається система стохастичних диференціальних рівнянь з постійним запізненням:

$$dx = f(t, x(t), x(t-h))dt + \sigma(t, x(t), x(t-h))dW(t), \quad t \in [-h, T), \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ — задане число, що характеризує запізнення, $W(t)$ — стандартний вінерівський процес, f і σ — функції, що задовольняють умову лінійного росту та умову Ліпшиця. Тут $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-h, 0]$ –початкова функція.

Поряд з цією системою розглядається наближена система з $m \in \mathbb{N}$ елементами:

$$\begin{cases} dz_0 = f(t, z_0, z_m)dt + \sigma(t, z_0, z_m)dW(t), \\ dz_1 = \frac{m}{h}(z_0 - z_1)dt, \\ \vdots \\ dz_m = \frac{m}{h}(z_{m-1} - z_m)dt, \\ z_0(0) = \varphi(0), \\ z_1(0) = \varphi\left(-\frac{h}{m}\right), \\ \vdots \\ z_m(0) = \varphi(-h). \end{cases} \tag{2}$$

Означення 1. *Будемо говорити, що система стохастичних диференціальних рівнянь (без запізнення)(2) апроксимує стохастичну систему рівнянь із запізненням (1), якщо виконується співвідношення*

$$\mathbb{E}sup_{t\in[0,T]} \left| x\left(t - \frac{j}{m}\right) - z_j(t) \right|^2 \to 0, \quad j = \overline{0, m},$$

при $m \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай система (1) задовольняє умову Ліпшиця. Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (2) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь (1) при $m \to \infty$ і $t \in [0, T]$.*

Література

[1] Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування / С.А Іліка та ін. Буковинський математичний журнал, 2014, Т. 2, №2-3. с. 107-111.

e-mail: grpetryna@gmail.com, vasyl.kavets@tsatu.edu.ua

Про одне узагальнення двосимвольних систем кодування чисел з двома основами

Віктор Плакида, Олександр Працьовитий

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нехай $\frac{1}{2} \leq g_0 < 1$, $g_0 + |g_1| = 1$, $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = g_0$, $A = \{0,1\}$ — двосимвольний алфавіт, $A^k = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k}$ — множина впорядкованих k-членних наборів, $L = A^\infty = A \times A \times ...$ — простір (множина) послідовностей з нулів та одиниць; $f_1 = 1$, $f_{k+1}(x_1, x_2, ..., x_k)$ — функція k-змінних, які набувають значень з алфавіту A, $k \in N$.

Для довільної послідовності $(\alpha_n) \in L$ розглядається вираз

$$\begin{aligned} &\delta_{\alpha_1} + \delta_{\alpha_2} f_2(\alpha_1) g_{\alpha_1} + \delta_{\alpha_3} f_3(\alpha_1, \alpha_2) g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} + ... \\ &+ \delta_{\alpha_k} f_k(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}) g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} ... g_{\alpha_{k-1}} + ... = \\ &= \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \delta_{\alpha_k} f_k(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}. \end{aligned} \tag{1}$$

Символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}$ називається Δ-*зображенням* суми ряду (1).

Множину значень таких виразів позначимо через E.

Множина, означена рівністю

$$\Delta_{c_1 ... c_m} = \{x : x = \Delta_{c_1 ... c_m \alpha_1 \alpha_2 ...}, a_i \in A_i\},$$

називається *циліндром рангу* m *з основою* $c_1 c_2 ... c_m$ у множині E.

Нас цікавлять умови (необхідні та достатні), за яких множина E є проміжком (відрізком) і при цьому система зображення чисел множини E засобами двосимвольного алфавіту має нульову надлишковість, тобто кожне число з множини E має не більше двох зображень.

Зауважимо, що окремі достатні умови цього добре відомі, а саме:

a) при $g_1 > 0$ і $f_k = 1$ маємо Q_2-зображення чисел множини $E = [0; 1]$;

b) при $g_1 < 0$ і $f_{k+1} = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k}$ маємо двосимвольну систему кодування чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$, що задає відоме G_2-зображення.

Виявляється, що не існує інших умов за яких система зображення чисел $E = [a; b]$ матиме нульову надлишковість. Це основний результат, який буде обговорюватись у доповіді.

Література

[1] Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

e-mail: plakyda@gmail.com, alexandr.pratsiovytyi@gmail.com

Слабкі розв'язки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу у нескінченновимірних просторах

Олександр Правдивий, Андрій Станжицький

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Робота присвячена існуванню і єдиності слабких розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу у нескінченновимірних просторах.

Нехай H, K, V є сепарабельними гільбертовими просторами та $V \subset H \subset V'$ складають трійку Гельфанда. Розглянемо рівняння вигляду

$$d(u(t) - g(u_t)) = (Au + f(u_t))dt + \sigma(u_t)dW(t), t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]. \tag{2}$$

де A - лінійний необмежений оператор в просторі H, шум $W(t)$ є Q-вінерівським процесом на просторі K. Для будь-якого $h > 0$ позначимо $C := C([-h,0], H)$, тоді f, g відображення з C в H, а σ відображення з C в L_2^0 де $L_2^0 := L(Q^{\frac{1}{2}}(K), H)$ - простір операторів Гільберта-Шмідта. Тут $u_t(\theta) = u(t+\theta)$ для будь-якого $\theta \in [-h, 0]$ і початкова умова $\phi : [-h, 0] \times \Omega \longrightarrow H$.

В подальшому будемо позначати норму в H як $||\cdot||$, норму в V як $||\cdot||_V$, супремну норму в C як $||\phi||_C := \sup_{\theta \in [-h,0]} ||\phi(\theta)||$ для будь-якого $\phi \in C$, норму в L_2^0 як $||\cdot||_{L_2^0}$ і інтегральну норму в L_2^V як $||\psi||^2_{L_2^V} := \int_{-h}^0 ||\psi(\theta)||_V^2 d\theta$ для будь-якого $\psi \in L_2^V$. Також позначимо $(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в H, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - дуальний скалярний добуток в V.

На відображення f, g, σ та на оператор A накладемо наступні умови

1. A - лінійний, обмежений оператор $V \longrightarrow V'$, самоспряжений, твірний аналітичної напівгрупи $S(t)$ для всіх $t > 0$, g діє з $C \cap L_2^V$ в V, f діє з $C \cap L_2^V$ в H, σ діє з $C \cap L_2^V$ в L_2^0.
2. A задовольняє умову неперервності і коерцитивності, σ задовольняє умову лінійного росту, f задовольняє умову степеневого росту, g задовольняє умову лінійного росту в нормах $||\cdot||$ і $||\cdot||_V$.
3. σ, g ліпшицеві, f - локально ліпшицева.
4. f задовольняє певні умови монотонності.

За умов, вказаних вище, отримано теорему

Теорема (Існування, єдиність)

Для будь-якої випадкової функції $\phi \in C \cap L_2^V$ що задовольняє умову

$$E\big(||\phi||_C^{2\gamma} + (\int_{-h}^0 ||\phi(\theta)||_V^2 d\theta)^\gamma\big) < \infty,$$

задача (1)-(2) має єдиний слабкий розв'язок на $[0,T]$ такий, що

$$u \in C(\Omega \times [0,T]; H) \cap L^2(\Omega \times [0,T]; V).$$

Слабким розв'язком задачі (1)-(2) вважаємо такий випадковий процес $u(t) \in V$, що

1. $u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]$;
2. $u \in L^2(\Omega \times [0,T], V)$;
3. для кожного $v \in V$ виконується

   $$(u(t) - g(u_t), v) = (\phi(0) - g(\phi), v) + \int_0^t \langle Au, v\rangle ds + \int_0^t (f(u_s), v)ds + \int_0^t (\sigma(u_s)dW(s), v),$$

   для всіх $t \in [0,T]$ майже напевно.

Робота виконана за часткової підтримки Національного фонду досліджень України, проект №2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною і стохастичною динамікою".

Література

[1] M. Rockhner, R. Zhu, X. Zhu. *Existence and uniqueness of solutions to stochastic functional differential equations in infinite dimensions*// Nonlin. Anal. 2012, Vol. 125,no. 4, p. 358-397.

[2] S. Mehri, M. Scheutzow, *A Stochastic Gronwall Lemma and Well-Posedness of Path-Dependent SDEs Driven by Martingale Noise*, arXiv:1908.10646v1, (2019).

[3] A.O.Stanzhytsky, *On weak and strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite–dimentional spaces*,Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications,Vol. 29 (2),pp.48–75, (2021).

e-mail: awxrvtb@gmail.com, a.stanzhytskyi@gmail.com

Розподіли ймовірностей на фрактальній самоподібній кривій павутинного типу, пов'язаній зі Сніжинкою Коха

Микола Працьовитий, Ірина Лисенко, Софія Ратушняк
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нехай $A_7 = \{0, 1, ..., 6\}$ — алфавіт, $L_7 = A_7 \times A_7 \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту; $\Delta^7_{\alpha_1(x)...\alpha_n(x)...} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{7^n}$ — сімкове зображення числа $x \in [0; 1]$; $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ — корені 6-го степеня з 1, тобто $\varepsilon_k = \cos\frac{\pi k}{6} + i \sin\frac{\pi k}{6}$, $\varepsilon_6 = 0$, (τ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ з ймовірностями p_{0n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, p_{4n}, p_{5n}, p_{6n} відповідно ($p_{kn} > 0$, $p_{0n} + p_{1n} + ... + p_{6n} = 1$).

Розглянемо комплекснозначну випадкову величину (в.в.) $\tau = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_{\tau_n}}{3^n}$. Множиною E_τ значень в.в. τ є множина комплексних чисел, що є образами відображення простору L_7 у множину комплексних чисел, яке аналітично виражається $g((\alpha_n)) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\alpha_n}}{3^n}$.

Розглянемо функцію $g(t)$, означену рівністю

$$g(t = \Delta^7_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\alpha_n(t)}}{3^n} = \Delta^g_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}. \tag{1}$$

Легко бачити, що означення функції g у сімково-раціональній точці не є коректним, оскільки $g(\Delta^7_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}(0)}) \neq g(\Delta^7_{\alpha_1\alpha_2...[\alpha_{m-1}-1](6)})$. Цей недолік легко усунути домовленістю використовувати лише одне з зображень аргумента (нехай те, що містить період (0)).

Теорема 1. *Функція g, коректно означена рівністю (5), неперервна по множині сімково-ірраціональних точок і розривна у кожній сімково-раціональній точці. В ній вона має неусувний розрив, величина якого в точці $\Delta^7_{c_1c_2...c_m(0)}$ дорівнює $\frac{2}{3^m}$.*

Теорема 2. *Множиною E_τ значень випадкової величини τ є самоподібною фрактальною кривою G простору R^2 (комплексної площини) зі структурою самоподібності $G = \bigcup\limits_{k=0}^{6} G_k$, $G \overset{\frac{1}{3}}{\sim} G_k$, $G_k = \varphi_k(G)$, де $\varphi_k(z) = \frac{2\varepsilon_k}{3} + \frac{1}{3}z$, що є множиною значень функції g дійсного аргумента $t = \Delta^7_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} \in [0; 1]^*$, яка аналітично виражається формулою (5).*

Теорема 3. *Множина типу Безиковича-Егглстона $M \subset G$, де*
$M = M[g; p_0, p_1, ..., p_6] = \{x : x = \Delta^g_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \nu_j(x) = p_j, j = \overline{0, 6}\}$
1) є множиною повної міри m, якщо $p_j = \frac{1}{7}$, $j = \overline{0, 6}$;
2) є множиною нульової міри m, якщо існує $p_j \neq \frac{1}{7}$.
Її фрактальна розмірність Гаусдорфа-Біллінгслі відносно ймовірнісної міри m і покриттів g-циліндрами обчислюється $\alpha_0(M) = \frac{\ln p_0^{p_0} p_1^{p_1} ... p_6^{p_6}}{-\ln 7}$.

Теорема 4. *В.в. τ має чисто дискретний розподіл тоді і лише тоді, коли $M \equiv \prod\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_k\{p_{kn}\} > 0$. У випадку дискретності точковим спектром розподілу τ є хвостовою множиною, представником якої є атом $z_0 = \Delta^g_{a_1a_2...a_n...}$, де $p_{a_nn} = \max\limits_k p_{kn}$ з максимальною масою M.*

Наслідок 1. Розподіл випадкової величини τ є неперервним тоді і тільки тоді, коли $M = 0$.

Наслідок 2. Розподіл неперервної випадкової величини τ, будучи зосередженим на нуль-множині Лебега, є сингулярним (ортогональним двовимірній мірі Лебега).

Наслідок 3. Якщо $M > 0$ і серед елементів матриці $||p_{kn}||$ немає нулів, то точковий спектр розподілу τ є всюди щільним у множині значень розподілу випадкової величини τ.

Теорема 5. *Спектром S_τ розподілу випадкової величини τ є множина*
$$Q = \{z \in E_\tau : p_{\alpha_n(z)n} > 0 \; \forall n \in N\}.$$

Наслідок 4. Якщо серед елементів матриці $||p_{kn}||$ немає нулів, то спектром розподілу випадкової величини τ є фрактальна крива G з розмірністю $\alpha_0 = \log_3 7$.

Зауваження 1. Оскільки розподіл в.в. τ еквівалентний розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^7_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ з незалежними однаково розподіленими цифрами сімкового зображення: $P\{\xi_n = j\} = p_j$, $j = \overline{0,6}$, то носієм розподілу τ є множина $M[g; p_0, p_1, ..., p_6] = \{x : \nu_i(x) = p_i, i = \overline{0,6}\}$.

Нехай m — геометрична ймовірнісна міра на G. До цього класу відноситься міра, що відповідає розподілу випадкової величини τ з ймовірностями $p_{kn} = \frac{1}{7}$.

Теорема 6. *Розподіли випадкових величин τ і τ', які визначені стохастичними векторами $\bar{p} = (p_0, p_1, ..., p_6)$ і $\bar{p}' = (p'_0, p'_1, ..., p'_6)$ відповідно, взаємно ортогональні, якщо $\bar{p} \neq \bar{p}'$, і еквівалентні, якщо $\overline{p} = \overline{p}'$.*

e-mail: prats4444@gmail.com, i.m.lysenko@udu.edu.ua, ratush404@gmail.com

Один континуальний клас фрактальних функцій, означених в термінах Q_s^*-зображення чисел

Микола Працьовитий, Світлана Васькевич, Валентина Назарчук

Інститут математики НАН України, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нехай $A_s \equiv \{0, 1, ..., s-1\}$ – s-ковий алфавіт, $L \equiv A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту A; $||q_{in}||$ — стохастична матриця така, що $0 < q_{in} < 1$, $q_{0n} + q_{1n} + ... + q_{s-1n} = 1$, $n \in N$ і

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A}\{q_{in}\} = 0. \tag{1}$$

Тоді відомо [2], що для довільного $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \tag{2}$$

де $\beta_{\alpha_n n} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_n - 1} q_{in}$. Розклад числа x в ряд (2) називається Q_s^*-*представленням* цього числа, а скорочений запис $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — його Q_s^*-*зображенням.*

Існують числа, що мають два зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}\alpha_m(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}[\alpha_m-1](s-1)}. \tag{3}$$

Вони називаються Q_s^*-*бінарними*. Множина таких чисел є зліченною. Решта чисел одиничного відрізка мають єдине зображення. Вони називаються Q_s^*-*унарними.*

Нехай a — фіксоване число з відрізка $[0;1]$, що має s-кове зображення $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + ... + \frac{a_n}{s^n} + ...,$ де $(a_n) \in L$.

Основим об'єктом розгляду є функція f_a, означена на $[0;1]$ рівністю:

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1-\alpha_1||a_2-\alpha_2|...|a_n-\alpha_n|...}. \tag{4}$$

Оскільки має місце нерівність $f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1...\alpha_n(0)}) \neq f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1...[\alpha_n-1](s-1)})$, то для більшості функцій даного класу коректність означення вимагає домовленості використовувати лише одне з двох зображень Q_s^*-бінарних чисел, а саме те, що містить (0).

Лема 1. *Для будь-якого $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...} \in [0;1]$ існує число $b = \Delta^s_{b_1b_2...b_n...} \in [0;1]$ таке, що*

$$f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\frac{a_1+b_1}{2}\frac{a_2+b_2}{2}...\frac{a_n+b_n}{2}...}) = f_b(\Delta^{Q_s^*}_{\frac{a_1+b_1}{2}\frac{a_2+b_2}{2}...\frac{a_n+b_n}{2}...}).$$

Теорема 7. *Функція f_a є неперервною на множині Q_s^*-унарних чисел, а на множині Q_s^*-бінарних чисел — лише за умови $a = 0$ або $a = 1$. Множиною значень E_{f_a} функції f_a, породженої числом $a = \Delta^{Q_s^*}_{a_1a_2...a_n...}$ є множина виду*

$$[Q_s^*; V_n] = \{x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1...\alpha_n...}, \alpha_n \in V_n \equiv \{0, 1, ..., \max\{s-1-a_n, a_n\}\}\}.$$

Теорема 8. *Множина f_a^{-1} рівня $y_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_n...}$ функції f_a, породженої числом $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$, є*

1) *порожньою множиною, якщо $c_n = s-1$, $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$;*

2) *скінченною множиною, якщо лише для скінченної кількості n має місце*

$$\begin{cases} a_n + c_n \in A_s, \\ a_n - c_n \in A_s; \end{cases}$$

3) континуальною множиною, якщо для нескінченної кількості n має місце

$$\begin{cases} a_n + c_n \in A_s, \\ a_n - c_n \in A_s. \end{cases}$$

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, диференціальних та фрактальних властивостей функції f_a.

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.

e-mail: nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua, prats4444@gmail.com

Крайова задача з імпульсним впливом для параболічного рівняння з виродженням

Іван Пукальський, Богдан Яшан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нехай $\eta, t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ – фіксовані числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, ..., N\}$, Ω – деяка обмежена область $dim\Omega \le n-1$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $dimD = n$, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$, $Q_0 = \{(t,x)|t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x)|t = \eta, x \in \overline{Q}\}$.

Розглянемо в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in Q \setminus Q_{(0)}, t \ne t_\lambda$ рівняння

$$[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(t,x)\partial_x^p]u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0, x) = \varphi_0(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x), x \in ((\Pi \setminus D) \cap (t = t_\lambda)), \tag{3}$$

а на межі області $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (B^{(\mu)}u - f_\mu)(t,x) \equiv \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} [\sum_{|k|=r_\mu} b_k(t,x)\partial_x^k u +$$

$$+ \sum_{|p|\le r_\mu - 1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u - f_\mu(t,x)] = 0 \tag{4}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t,x) \in Q \setminus Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \le 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t-\eta| \ge 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho(x)^{\beta_i^{(2)}}$ при $\rho(x) \le 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$, $i \in \{1, ..., n\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

Позначимо через $Q^{(r)} = [t_r, t_{r+1}) \times D$, $r \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$, $\delta_{\mu,p_i}^{(\nu)}$, $\delta_\mu^{(\nu)}$, $i \in \{1, ..., n\}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $l > 0$, $\{l\} = l - [l]$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$ – довільні точки із Q, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1) – (4). $C^l(\gamma; \beta; q; Q)$ – множина функцій $u : (t,x) \in Q$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(r)} \setminus Q_{(0)}$ вигляду $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2bj + |k| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma; \beta; q; \Pi\|_l = \sup_r \sum_{2bj+|k|\le[l]} [\sup_{P \in \overline{Q}^{(r)}} S(q; s_1; s_2; 2bj + |k|; t, x)|\partial_t^j \partial_x^k u(P)|] +$$

$$+ \sup_r \left\{ \sum_{2bj+|k|=[l]} \left[\sum_{i=1}^n \sup_{(P_1, H_i) \in \overline{Q}^{(r)}} \Big(S(q; s_1; s_2; |l|; t^{(1)}, \widetilde{x}) s_1(\{l\}(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}), t^{(1)}) \times \right.\right.$$

$$\times s_2(\{l\}(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), \widetilde{x})|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(H_i)| \Big) +$$

$$+ \sup_{(P_1, P_2) \in \overline{Q}^{(r)}} \Big(S(q; s_1; s_2; |l|; \widetilde{t}, x^{(1)}) s_1(\{l\}\gamma^{(1)}, t^{(1)}) s_2(\{l\}\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\left.\left. \times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2b}\}} |\partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(P_2)| \Big) \right] \right\}.$$

Тут позначено: $s_1(a, \tilde{t}) = \min\{s_1(a, t^{(1)}), s_1(a, t^{(2)})\}$, $s_2(a, \tilde{x}) = \min\{s_2(a, x^{(1)}), s_2(a, x^{(2)})\}$, $S(q; s_1, s_2; [l]; t, x) = s_1(q^{(1)} + [l]\gamma^{(1)}, t) s_2(q^{(2)} + [l]\gamma^{(2)}, x) \times \prod_{i=1}^n s_1(-k_i\beta_i^{(1)}, t) s_2(-k_i\beta_i^{(2)}, x)$.

Щодо задачі (1)-(4), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $a_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\in$ $\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $a_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n} s_1(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t)s_2(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $1\le|p|\le 2b-1$, $a_0(t,x)s_1(\mu_0^{(1)},t)\ s_2(\mu_0^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $a_0(t,x)\le K<\infty$ і задача

$$[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\partial_x^k]u(t,x)=\tilde f(t,x),$$

$$u(t_0+0)=\widetilde\varphi(x),$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[\sum_{|k|=r_\mu}b_k^{(\mu)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2),x})\partial_x^k u(t,x)-\widetilde f_\mu(t,x)]=0,$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського;

б) функції $f_0(t,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;Q)$, $\varphi_0\in C^{2b+\alpha}(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D)$, $\widetilde\gamma=(0,\gamma^{(2)})$, $\widetilde\beta=(0,\beta^{(2)})$, $\varphi_\lambda\in C^{2b+\alpha}(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap\{t=t_\lambda\})$, $f_\mu(t,x)\in C^{2b-r_\mu+\alpha}(\gamma;\beta;r_\mu\gamma;Q)$, $\partial D\in C^{2b+\alpha}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B^{(\mu)}\varphi_0-f_\mu)(0,x)=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow z\in\partial D}\{[B^{(\mu)}\varphi_\lambda+(1+b_\lambda)f_\mu](t_\lambda-0,x)-f_\mu(t_\lambda+0,x)\}=0$,

$\gamma^{(\nu)}=\max\{\max\limits_i\beta_i^{(\nu)},\max\limits_{i,p_i}\dfrac{p_i(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2b-|p|},\max\limits_{i,\mu,p_i}\dfrac{p_i(\delta_{\mu,p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2\mu-|p|},\dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2b},\max\limits_{\mu}\dfrac{\delta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le c\left\{\sum_{r=1}^{N}\left[\prod_{\lambda=r}^{N}((1+\|b_\lambda\|))[\sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;Q^{(r-1)}\|_{2b-r_\mu+\alpha}+\right.\right.$$
$$\left.+\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{r-1}\|_\alpha+\|\varphi_{r-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap\{t=t_{r-1}\}\|_{2b+\alpha})\right]+ \tag{5}$$
$$+\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^N\|_\alpha+\|\varphi_N;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap\{t=t_N\}\|_{2b+\alpha}+$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;Q^{(N)}\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right\}.$$

Для доведення теореми встановлюється розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої є розв'язком задачі (1)–(4).

e-mail: b.yashan@chnu.edu.ua

Фрактальний аналіз функцій, означених в термінах ланцюгового A_s-зображення

Софія Ратушняк

Інститут математики НАН України, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нехай $A_s \equiv \{e_0, e_1, ..., e_{s-1}\}$ — алфавіт (набір елементів e_i, таких що $0 < e_0 < e_1 < ... < e_{s-1}$), $L_s \equiv A_s \times A_s \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту.

Ланцюговим A_s-дробом називається нескінченний ланцюговий дріб

$1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + ... + 1/a_n + ... \equiv [0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...]$, $(a_n) \in L_s$.

Очевидно, що для множини E значень ланцюгових A_s-дробів має місце

$\min\limits_{a_n \in A_s} \{E\} = [0; (e_{s-1}, e_0)] \equiv d_0$, $\max\limits_{a_n \in A_s} \{E\} = [0; (e_0, e_{s-1})] \equiv d_1$.

Theorem 1. *Якщо $e_i = e_{i-1} + d$, $i = \overline{1, s-1}$, де $d = d_1 - d_0$, то для довільного $x \in [d_0; d_1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_s$, така що*

$$x = [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...] \equiv \Delta^{A_s}_{a_1 a_2 ... a_n ...}.$$

Запис $\Delta^{A_s}_{a_1 a_2 ... a_n ...}$ називається *ланцюговим A_s-зображенням* числа x.

Циліндром рангу m з основою $c_1 ... c_m$ називається множина $\Delta^{A_s}_{c_1 ... c_m}$ чисел відрізка $[d_0; d_1]$ така, що

$$\Delta^{A_s}_{c_1 ... c_m} = \{x : \ x = \Delta^{A_s}_{c_1 ... c_m a_1 a_2 ...}, (a_n) \in L_s\}.$$

Циліндр $\Delta^{A_s}_{c_1 ... c_m}$ є відрізком з кінцями $\Delta^{A_s}_{c_1 ... c_m (e_0 e_{s-1})}$ і $\Delta^{A_s}_{c_1 c_2 ... c_m (e_{s-1} e_0)}$ (де лівий, а де правий кінець, залежить від парності і непарності m).

Зауважимо, що при виконанні умов теореми 1 мають місце рівності

$\sup \Delta^{A_s}_{c_1 c_2 ... c_{2m-1} e_j} = \inf \Delta^{A_s}_{c_1 c_2 ... c_{2m-1} e_{j+1}}$, $j \in \{0, ..., s-2\}$, $m \in N$

$\sup \Delta^{A_s}_{c_1 c_2 ... c_{2m} e_{j+1}} = \inf \Delta^{A_s}_{c_1 c_2 ... c_{2m} e_j}$, $j \in \{0, ..., s-2\}$, $m \in N$.

Тому існує зліченна множина чисел, що мають два A_s-зображення:

$\Delta^{A_s}_{a_1 ... a_{m-1} e_0 (e_0 e_{s-1})} = \Delta^{A_s}_{a_1 ... a_{m-1} e_{s-1} (e_{s-1} e_0)}$.

Їх називають A_s-бінарні. Решта чисел відрізка $[d_0; d_1]$ мають єдине A_s-зображення (A_s-унарні).

Зазначимо, що якщо $s = 2$, а $d = \frac{1}{2}$, то A_s-зображення співпадає з ланцюговим A_2-зображенням, для якого $e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$. Останнє зображення розглядалося в багатьох роботах [1, 1, 2, 4, 5, 6], а отримані результати тополого-метричного аналізу знайшли свої застосування в різних галузях математики, зокрема у теорії сингулярно неперервних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера.

Нехай задано дві множини $A_s = \{e_0, e_1, ..., e_{s-1}\}$ і $A'_s = \{e'_0, e'_1, ..., e'_{s-1}\}$, елементи яких задовольняють умови теореми 1. Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta^{A_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}) = \Delta^{A'_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}, \tag{1}$$

де $\Delta^{A_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}$ і $\Delta^{A'_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}$ — ланцюгові A_s-зображення, породжені відповідно елементами множин A_s і A'_s. Очевидно, що функція f є коректно означеною рівністю (1) на множині A_s-бінарних чисел, оскільки

$$f(\Delta^{A_s}_{\alpha_1 ... \alpha_{n-1} e_0 (e_0 e_{s-1})}) = f(\Delta^{A_s}_{\alpha_1 ... \alpha_{n-1} e_{s-1} (e_{s-1} e_0)}) \ \forall n \in N.$$

Theorem 2. *Функція f, означена рівністю (1), є неперервною строго зростаючою функцією, причому сингулярною функцією, якщо хоча б для одного елемента алфавіту $e_j \neq e'_j$.*

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних, структурних, тополого-метричних властивостей функції f.

Література

[1] *Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V.* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[2] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1.— P.91–101.

[3] *Pratsiovytyi M., Chuikov A.* Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.

[4] *Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Chuikov A.S.* Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval [0;1] by -continued fractions. //Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2019. 1 (130). Pp. 71-83.

[5] *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

[6] *Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2-дробом з незалежними елементами // Теорія ймовірностей та математична статистика. 2009. Вип. 81. С. 139 — 154.

e-mail: ratush404@gmail.com

Спільні кратні матриць третього порядку над комутативними областями безу стабільного рангу 1,5

Андрій Романів

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 [3]. $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R. Згідно з теоремою 1 із праці [2] R – область елементарних дільників [4], тобто кожна матриця D над R має властивість канонічної діагональної редукції, тобто

$$D \sim \Psi = diag(d_1, \dots, d_n),$$

де $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Зауважимо, що символ "$\sim$"позначає еквівалентність матриць, а позначення $a|b$ означає, що елемент a ділить елемент b. Матрицю $\Psi = diag(d_1, \dots, d_n)$ називають канонічною діагональною формою, а елементи $d_1, \dots, d_n$ – інваріантними множниками матриці D.

У роботі [5] вказані деякі властивості найменших спільних кратних матриць над комутативною областю головних ідеалів. Зокрема, вказані умови подільності інваріантних множників двох матриць та інваріантних множників їх найменшого спільного кратного. Такі дослідження були продовжені в роботі [1], в якій вивчаються властивості спільних кратних матриць. А саме, для матриць другого порядку показано взаємозв'язок між їх спільними правими кратними над комутативною областю головних ідеалів. Природньо виникає потреба дослідження таких властивостей для ширших класів матриць. У цій праці, для неособливих матриць третього порядку, за певних обмежень на канонічні діагональні форми, вказано взаємозв'язок між їх спільними правими кратними над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5.

Нехай $A, B \in M_3(R)$ – неособливі матриці над R, які мають канонічні діагональні форми

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon), \ \mathrm{B} \sim \Delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \delta),$$

відповідно.

Символом $[a, b]$ позначатимемо найменше спільне кратне елементів a та b.

Теорема. Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5. Матриці A, B, $M, T \in M_3(R)$ та мають канонічні діагональні форми $A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon)$, $B \sim \Delta = diag(1, \delta, \delta)$, $M \sim \Omega = diag(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\omega_i \mid \omega_{i+1}$, $i = 1, 2$, $T \sim \Gamma = diag(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_i \mid \gamma_{i+1}$, $i = 1, 2$, відповідно. І нехай $M = AA_1 = BB_1$ та $T = AA_2 = BB_2$. Тоді, якщо $\omega_1 \mid \gamma_1$, $[\varepsilon, \delta] = \omega_2 \mid \gamma_2$ та $[\varepsilon, \delta] = \omega_3 \mid \gamma_3$, то $T = MN$.

Література

[1] *Романів А., Щедрик В.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – 9. – С. 269–284.

[2] *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 та розкладність повної лінійної групи у добуток її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – 69, № 1. – С. 113–120.

[3] *Щедрик В. П.* Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 6. – С. 849–860.

[4] *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.

[5] *Thompson R. C.* Left multiples and right divisor of integral matrices // Linear and Multilinear Algebra – 1986. – 19. – P. 287–295.

e-mail: romaniv_a@ukr.net

Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$

Наталія Самарук

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна

Нехай H – підгрупа просторової афінної групи $\mathrm{Aff}(3)$, що розглядається разом з своєю природною дією на дійсному векторному просторі многочленів від трьох змінних.

Означення. *Сім'я многочленів $B_{m,n,k}(x,y,z)$ називається квазі-мономом відносно H, якщо оператори групи в двох різних базисах $\{x^m y^n z^k\}$ і $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ мають однакові матриці.*

У статті [1] отримано повний опис усіх сімей многочленів, які є квазімономами відносно групи поворотів площини $SO(2)$, в термінах породжуючих функцій цих сімей. У статті [2] нами отримано опис квазімономів для випадку, коли група H породжена масштабуваннями, поворотами та паралельними перенесеннями площини.

Ми пропонуємо вичерпний опис, подібний до 2D випадку, сімей многочленів, які є квазімономами відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$.

Означення. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ називається* ***квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору****, якщо виконується наступна тотожність*

$$B_{m,n,k}(x+a,y+b,z+c)=$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{k}{l}a^{m-i}b^{n-j}c^{k-l}B_{i,j,l}(x,y,z),$$

для всіх $m,n,k\in\mathbb{N}$ і для всіх $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема. *Сім'я многочленів $B_{m,n,k}(x,y,z)$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд*

$$G=C(u,v,w)e^{xu+yv+zw},$$

де $C(u,v,w)$ – довільний степеневий ряд за змінними u,v,w.

Означення. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ називається* ***квазі-мономіальною відносно групи поворотів простору SO(3)****, якщо виконується наступна тотожність*

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}(B_{m,n,k}(x,y,z))=\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m\\ n_1+n_2+n_3=n\\ k_1+k_2+k_3=k}}C(\alpha,\beta,\gamma,m_1,\ldots,k_3)\times$$
$$\times B_{m_1+n_1+k_1,m_2+n_2+k_2,m_3+n_3+k_3}(x,y,z),$$

для всіх $m,n,k\in\mathbb{N}$ і всіх $T_{\alpha,\beta,\gamma}\in SO(3)$.

Наступна теорема є критерієм квазі-мономіальності сім'ї многочленів відносно групи поворотів простору $SO(3)$ у термінах її *експоненціальної* породжуючої функції

Теорема. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією*

$$G=G(x,y,z,u,v,w)=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!},$$

є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних $ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2$ і $u^2 + v^2 + w^2$.

Властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени домножити на константу, що є звичайною практикою в застосуваннях для підтримки діапазону значень у розумних межах. Наступна теорема вказує на які константи можна множити многочлени для збереження властивості квазі-мономіальності.

Теорема. *Припустимо, що $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є сім'єю квазі-мономів. Сім'я многочленів $\{\widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)\}$, де*

$$\widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,n}(x, y, z),$$

буде квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є довільною функцією однієї змінної $m + n + k$.

Дослідження містить вичерпний опис сім'ї многочленів, які є квазі-мономами відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$, поширюючи результати попередніх робіт на 2D-випадки. Продемонстровано, що сім'ю многочленів можна вважати квазі-мономами тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція залежить від певних трьох змінних. Крім того, встановлено умови, за яких розтяг (масштабування) квазі-мономів зберігає їхню властивість бути квазі-мономом.

Література

[1] Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. *Non-separable rotation moment invariants.* Pattern Recognition 2022, **127**, 108607.

[2] Samaruk N. Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. Matematychni studii. 2023. Vol. 59, **1**. P. 3-11.

e-mail: samaruk.nat@khmnu.edu.ua

Сингулярні функції, пов'язані з марковським зображенням чисел

Дар'я Сергійко

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нехай $A \equiv \{0,1,2\}$ – алфавіт, $L = A\times A\times\ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту, q_0, q_1, q_2 – фіксований набір додатних дійсних чисел такий, що $\sum\limits_{i=0}^{2} q_i = 1$, $\|q_{ij}\|$ - стохастична матриця 3-го порядку ($\sum\limits_{j=0}^{2} q_{ij} = 1, \forall i \in A, q_{ij} > 0$). Тоді *для довільного* $x \in [0;1]$ *існує* $(\alpha_n) \in L$ *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j\alpha_{j+1}} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\beta_{\alpha_1} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i, \beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1} \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k-1} q_{\alpha_k i}$. Розклад числа x в ряд називається *марковським представленням*, скорочений запис $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – *марковським зображенням* цього числа. Якщо $q_i = q_{ij} = 1/3\ \forall i,j \in A$, то марковське зображення співпадає з класичним трійковим зображенням.

Розглядається функція I, яка означується на відрізку $[0;1]$ рівністю

$$I(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Означення функції I є коректним на множині чисел, що мають два формально різних зображення: $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}$.

Теорема 1. *Функція I є неперервною на відрізку $[0;1]$ строго спадною функцією, причому $I(0) = 1$, $I(1) = 0$. Функція I циліндр m-го рангу $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}$ відображає у циліндр $\Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_m]\ldots}$ m-го рангу і зберігає цифру 1 у марковському зображенні числа.*

Теорема 2. *Якщо має місце хоча б одна з нерівностей $q_{00} \neq q_{22}$, $q_{01} \neq q_{21}$, $q_{02} \neq q_{20}$ або $q_{10} \neq q_{12}$, то інверсор I є сингулярною функцією.*

У доповіді пропонують результати дослідження структурних, фрактальних та диференціальних властивостей функції I.

Література

[1] *Маркітан В.П.* Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Збірник праць Інституту математики НАН України, т. 14, №4. – 2017. – с.34-48.

[2] *Працьовитий О.М.* Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування // Студентські фізико-математичні етюди. – №3(2008). – с.57-67.

e-mail: 21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua

Наближення сумами Фур'є класів Вейля-Надя $\boldsymbol{W^r_{\beta,1}}$ в рівномірній метриці

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Досліджується задача про встановлення асимптотичної поведінки точних верхніх меж відхилень сум Фур'є $S_{n-1}(f)$ на класах $W^r_{\beta,1}$ 2π-періодичних диференційовних в сенсі Вейля-Надя фунцій f у рівномірній метриці.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на $[-\pi,\pi)$ функцій φ з нормою $\|\varphi\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|dt$ і C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ з нормою $\|\varphi\|_C = \max\limits_t |\varphi(t)|$.

Нехай, далі, $W^r_{\beta,1}, r > 1, \beta \in \mathbb{R},$ — класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\varphi * B_{r,\beta})(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)B_{r,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з ядрами Вейля-Надя $B_{r,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, функцій φ, що задовольняють умову $\varphi \in B^0_1 = \left\{\varphi \in L : \|\varphi\|_L \le 1, \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0\right\}$.

Класи $W^r_{\beta,1}$ називають класами Вейля–Надя, а функцію φ в зображенні (2) називають (r,β)-похідною в сенсі Вейля–Надя функції f і позначають через f^r_β.

Теорема 1. *Нехай $r > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C = \sup_{f\in W^r_{\beta,1}} \|f - S_{n-1}(f)\|_C = \frac{1}{n^r}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-r/n})} + \mathcal{O}(1)\delta_{r,n}\right), \tag{2}$$

де

$$\delta_{r,n} = \begin{cases} 1 + \dfrac{n}{r(r-2)}, & 2 < r \le n+1, \\ \dfrac{r}{n^2}e^{-r/n}, & n+1 \le r \le n^2, \\ e^{-r/n} & n^2 \le r. \end{cases}$$

а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Оцінку (2) при $r \ge \sqrt{n}+1$ опубліковано в [1, 2].

Робота частково підтримана грантом H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology), VolkswagenStiftung project "From Modeling and Analysis to Approximation" і грантом Фонду Саймонса (Simons Foundation (1290607, AS) and (1290607, IS)).

Література

[1] A. S. Serdyuk and I. V. Sokolenko. Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness. *Meth. Funct. Anal. Topol.*, 25, No. 4, 381–387, 2019.

[2] A. S. Serdyuk and I. V. Sokolenko. Approximation by Fourier sums in the classes of Weyl–Nagy differentiable functions with high exponents of smoothness. *Ukr. Math. J.*, 74, No 5, 783–800, 2022.

e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Фано та Булеві лайнери

Оксана Скигар

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Метою роботи було дослідити структуру та алгебричні властивості Фано та Булевих лайнерів, зокрема муфанговість; також їхні координатні площини та особливості тернарних кілець.

Під поняттям лайнеру будемо розуміти таку структуру $(X, \mathcal{L})$, де X – довільна множина точок, $\mathcal{L}$ – множина прямих, для яких справджуються такі аксіоми:

- Для довільних двох точок з X існує єдина пряма з $\mathcal{L}$, яка проходить через них
- Для довільної прямої з $\mathcal{L}$ існують дві різні точки з X якій їй належать.

Лайнер X називається Фано, якщо для будь-якої площини з X та чотирикутника з неї діагоналі та сторони попарно паралельні (афінний випадок), або перетинаються у точці, яка колінеарна точкам перетину сторін (проективний). Лайнер називається Булевим, якщо у кожного паралелограма діагоналі паралельні. Зв'язок між ними такий: кожен Фано є Булевим.

Багато властивостей Фано були сформовані саме для регулярних випадків. Зокрема з регулярності Фано слідує його повна регулярність. З цього випливає теорема: поповнення проафінного Фано регулярного лайнера є проективним Фано. Постало логічне питання чи будь-які Фано лайнери повністю регулярні. Знайшовся контрприклад - проєктивний Фано без прямої з виколотою точкою.

Лайнер називається муфанговим, якщо для нього справджується мала теорема Дезарга: для довільних чотирьох прямих A, B, C, D та трикутників abc, $a'b'c'$, таких що a, a' лежать на A, b, b' лежать на B, c, c' лежать на C: якщо дві відповідні пари сторін трикутників перетинаються у точках, які належать D, то й третя пара перетинається на прямій D.

Стосовно алгебризації лайнерів Фано була сформована гіпотеза: проафінний лайнер є фано тоді і тільки тоді, коли цей лайнер є муфанговим над тілом скалярів характеристики 2. Тернарні кільця, якими алгебризують Муфангові лайнери мають інверсивні стосовно множення лупи, з чого випливають лінійність, асоціативність додавання та альтернативність. Правдивим є і обернене твердження.

Постало питання тоді чи будь-який Фано лайнер є муфанговим. Для скінченного випадку Гліссон довів, що це справджується. Для нескінченних площин це досі є відкритою проблемою.

e-mail: oksana.skyhar@lnu.edu.ua

Структура розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь на випадок матриці з від'ємними коефіцієнтами

В.В. Собчук, І.О. Зеленська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Диференціальні рівняння є зручними математичними моделями для широкого спектру явищ майже в кожній галузі науки і техніки. Часто, асоціюючи математичні моделі з реальними фізичними явищами, ми маємо дослідити достатньо вузькі області, в яких розв'язок змінюється з експоненціального на коливний. В цьому випадку математичними моделями є сингулярно збурені задачі з точками звороту.

Постановка задачі

Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{1}$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(x) & a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

методом істотно особливих функцій [1] побудуємо рівномірну асимптотику розв'язку на відрізку $[-l, 0]$, включаючи і точку звороту $x = 0$.

Сингулярно збурена задача (1) досліджувалась за таких умов:

С 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[-l, 0]$.

С 2. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) < 0$.

Розглянуто випадок, коли один з лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння (1) необмежено зростає, коли $\varepsilon \to 0$, то точку звороту $x = 0$ називають **нестабільною точкою звороту**.

Розв'язок виродженого рівняння має розрив другого роду в точці звороту. Тому він не може бути використаний для побудови третього лінійно незалежного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (1). Замість нього буде використано частинний розв'язок неоднорідної задачі. (1).

Істотно особливі функції, які виникають у розв'язках однорідної задачі (1) при $\varepsilon = 0$, зручно описати, використовуючи функції Ейрі-Лангера Ai(t) і Bi(t) та їх похідні [1]. Тому нагадаємо аналітичний запис цих функцій та їх похідних.

Функція

$$\mathrm{Ai(t)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\Big(\frac{s^3}{3} + st\Big)ds$$

є розв'язком $U''(t) - tU(t) = 0$. Другим розв'язком цього модельного рівняння є функція [1]

$$\mathrm{Bi(t)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \{exp[-\frac{s^3}{3} + st] + sin[\frac{s^3}{3} + st]\}ds.$$

Для похідних цих функцій маємо такі рівності

$$\mathrm{Ai'(t)} = \frac{-t^{\frac{1}{4}}e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}}\Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_k \xi^{-k}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Bi'(t)} = \frac{t^{\frac{1}{4}}e^{-\xi}}{\sqrt{\pi}}\Sigma_{k=0}^{\infty} d_k \xi^{-k},$$

де $d_0 = 1$; $d_k = -\frac{6k+1}{6k-1}$, $k\epsilon N$.

Істотно особливі функції, які виникають у частинних розв'язках неоднорідної задачі (1) будемо описувати за допомогою модельного оператора вигляду:

$$U''(t) - tU(t) = \pi^{-1}.$$

Для побудови рівномірної асимптотики розв'язку з нестабільною точкою звороту використовуватимемо частинний розв'язок цього рівняння коли $t\epsilon[0;+\infty)$

$$\nu(t) = \mathrm{Bi(t)} \int_{+\infty}^{t} \mathrm{Ai}(\tau)d\tau - \mathrm{Ai(t)} \int_{0}^{\tau} \mathrm{Bi}(\tau)d\tau$$

Похідна цієї функції запишеться у вигляді

$$\nu'(t) = -\pi^{-1} \int_0^\infty scos(\frac{1}{3}s^3 + st)ds \tag{3}$$

Згідно методу істотно особливих функцій та попередніх досліджень[2, 3, 4], необхідною умовою розширення задачі є справедливість співвідношення

$$\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x,\varepsilon). \tag{4}$$

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача (4) буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} D_{ik}(x,t,\varepsilon) + f_k(x,\varepsilon)\nu(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\nu'(t) + \omega_k(x,\varepsilon)$$

$$\sum_{i=1}^{2} D_i k(x,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}(x,\varepsilon) \\ \alpha_{i2}(x,\varepsilon) \\ \alpha_{i3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_k(t) + \varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} \beta_{i1}(x,\varepsilon) \\ \beta_{i2}(x,\varepsilon) \\ \beta_{i3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} {U_k}'(t)$$

$$U''(t) - tU(t) = 0, \quad \nu''(t) - t\nu(t) = \pi^{-1}.$$

Формальний розв'язок системи (1) має вигляд

$$\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon) = \tilde{Y}_{hom}(x,t,\varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon), \tag{5}$$

де $\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$ – розв'язок однорідної системи, а $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ – частинний розв'язок, відповідно, неоднорідної системи, тобто

$$\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x)U_i'(t) \right] \right] + \omega_{kr}(x) \right] + \tag{6}$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x)\nu'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Література

[1] Бобочко В.М., М.О. Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – К.: Наукова думка, 2002. – 310 с.

[2] Valentyn Sobchuk V., Laptiev O., Zelenska I. Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. – 2023 – 71, №3. – P. Article number: e145682 DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682

[3] Собчук, В. В., Зеленська, І. О. Особливості побудови асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту при додатних коефіцієнтах матриці // Дослідження в математиці і механіці. Том 28 № 1-2(41-42) (2023). С. 120-138. DOI: 10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305266

[4] Sobchuk, V. V., Zelenska, I. O. (2023). Construction of asymptotics of the solution for a system of singularly perturbed equations by the method of essentially singular functions. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics, (2), 184–192. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.34

e-mail: Kopchuk@gmail.com

Дисипативність систем динамічних рівнянь на часових шкалах

Вікторія Цань, Юрій Перестюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Дослідження якісних властивостей розв'язків динамічних систем на часових шкалах є актуальним та важливим напрямком сучасної теорії динамічних систем. Вивчення цих властивостей дозволяє краще зрозуміти поведінку систем, що є ключовим для багатьох практичних застосувань, таких як моделювання соціальних мереж, біологічних процесів та економічних систем [1]. Раніше у роботах [2, 3, 4] було вивчено питання збереження обмеженості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. Взаємозв'язок між коливністю таких розв'язків досліджено у роботах [5, 6]. Подібні питання для задач оптимального керування розглядаються у роботах [7, 8, 9, 10]. Дана робота присвячена дослідженню дисипативності динамічних систем на часових шкалах, що розширює можливості дослідження стійкості та керованості таких систем.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, D - область в просторі $\mathbb{R}^n$, і відповідну їй систему динамічних рівнянь на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda) \tag{2}$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^d$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$. Припустимо, що $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, і $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ, причому для всіх $\lambda \in \Lambda$ точка $t = 0$ належить $\mathbb{T}_\lambda$.

Також припустимо, що функція $X(t, x)$ визначена при всіх $t \geq 0$, $x \in D$, неперервна по t та x і обмежена разом зі своїми частинними похідними по t та x в кожній обмеженій області з $\{t \geq 0\} \times D$, тобто для кожного $M > 0$ існує число $L(M)$ таке, що

$$|X(t, x)| + \left|\frac{\partial X(t, x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\right\| \leq L(M), \tag{3}$$

якщо $t \leq M$ і $\|x\| \leq M$. Тут $|\cdot|$ – евклідова норма на $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ – норма матриці представлена векторною нормою. З нерівності (3) випливає, що існують локально інтегровні функції $M_R(t)$ та $B_R(t)$ такі, що

$$|X(t, x)| \leq M_R(t), \tag{4}$$

$$|X(t, x_1) - X(t, x_2)| \leq B_R(t)|x_2 - x_1| \tag{5}$$

при $x, x_i \in U_R$. Тут і далі через U_R позначено множину точок x, що $\|x\| \leq R$.

Нехай $\mu_\lambda := \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ - функція зернистості. Причому, якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з неперервною шкалою часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система (2) переходить в систему (1). Тому природно сподіватись, що за певних умов з дисипативності системи диференціальних рівнянь (1) випливає дисипативність відповідної системи динамічних рівнянь (2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$.

Означення.[11] *Систему* (1) *будемо називати дисипативною по* $t \geq t_0$, *якщо існує число* $R > 0$ *таке, що для довільного* $r > 0$ *існує* $T = T(r, t_0)$ *таке, що розв'язок* $x(t; t_0, x_0)$ *системи* (1) *з початковими умовами* (t_0, x_0),

$$|x_0| < r, \tag{6}$$

при $t \geq t_0 + T$ *задовольняє нерівність*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < R.$$

Систему (1) *називатимемо рівномірно дисипативною по* t_0*, якщо в наведеному означенні,* T *не залежить від* t_0.

Означення. *Систему* (2) *будемо називати дисипативною по* $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}$*, якщо існує число* $R(\lambda) > 0$ *таке, що для довільного* $r > 0$ *існує* $T = T(r, t_0, \lambda)$ *для якого розв'язок* $x_\lambda(t, t_0, x_0)$ *системи* (2) *з початковими умовами* (t_0, x_0),

$$|x_0| < r, \tag{7}$$

при $t \geq t_0 + T$ *задовольняє нерівність*

$$\|x_\lambda(t, t_0, x_0)\| < R.$$

Систему (2) *називатимемо рівномірно дисипативною по* $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ *і* $\lambda \leq \lambda_0$*, якщо в наведеному означенні ,* R *та* T *не залежать від* t_0 *та* λ.

Нами визначені умови дисипативності системи динамічних рівнянь (2) в термінах функції Ляпунова $V(t, x)$.

Відносно всіх функцій Ляпунова, що розглядатимуться далі, припустимо, що $V(t, x)$ Δ-абсолютно неперервні по t та рівномірно неперервні по x в околі кожної точки. Крім того, вони задовольняють локальну умову Ліпшиця по x для кожного $0 < \lambda \leq \lambda_0$ в області $\{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_\lambda}\} \times U_R$ зі сталою Ліпшиця, що залежить від R та T. Цей факт будемо позначати: $V \in \mathbf{C}_0$.

Означення. *Оператор* $d^0/\Delta t$*, що визначається співвідношенням*

$$\frac{d^0 V(t, x)}{\Delta t} = \overline{\lim_{t \to t_0 + 0, t \in \mathbb{T}_\lambda}} \frac{1}{t - t_0} \left[V(t, x_\lambda(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) \right],$$

будемо називати оператором Ляпунова, що відповідає системі (2)

З [12] випливає, що:

Зауваження. Якщо $V(t, x) \in \mathbf{C}_0$, тоді для майже всіх t оператор Ляпунова збігатиметься з Δ-похідною функції V в силу системи (2).

Тоді виконується наступна теорема.

Theorem 1. *Якщо система динамічних рівнянь* (2) *на часовій шкалі* $\mathbb{T}_\lambda$*,* $\lambda > 0$*, має невід'ємну функцію Ляпунова* $V(t, x) \in \boldsymbol{C}_0$*, визначену при* $t \geq t_0$*,* $t \in \mathbb{T}_\lambda$*,* $x \in D \subset \mathbb{R}^n$*, з наступними властивостями:*

1)
$$\inf_{t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}_\lambda}, \|x\| \geq \rho} V(t, x) = V_\rho(\lambda) \to \infty, \quad \rho \to \infty, \tag{8}$$

2) при $x \in \bar{U}_{R_0} = \{\|x\| \geq R_0, t \geq t_0\}$ *існує* $C = C(\lambda) > 0$ *таке, що*

$$\overset{\Delta}{V}(t, x) \leq -C(\lambda) V(t, x), \tag{9}$$

а при $x \in U_{R_0}$ *функції* V *і* $\overset{\Delta}{V}(t, x)$ *обмежені згори,*

тоді система (2) *дисипативна.*

Якщо $V(t, x)$ *та* C *не залежать від* λ *і співвідношення* (8) *виконується рівномірно по* $\lambda \leq \lambda_0$*, тоді система* (2) *рівномірно дисипативна.*

Також справедливі наступні умови існування функції Ляпунова для дисипативної системи динамічних рівнянь на часових шкалах.

Theorem 2. *Якщо існує таке* $\lambda_0 > 0$*, що система динамічних рівнянь* (2) *дисипативна для кожного* $\lambda \leq \lambda_0$ *і виконуються умови* (4), (5)*, то для кожної системи* (2) *існує невід'ємна функція Ляпунова* $V(t, x)$*, що задовольняє умови* (8), (9) *при* $\lambda < \lambda_0$.

Також нами отримано умови дисипативності системи диференціальних рівнянь (1) за умови дисипативності відповідної динамічної системи (2).

Theorem 3. *Нехай $X(t,x)$ задовольняє умову* (3) *та існує таке λ_0, що для всіх $\lambda \leq \lambda_0$ система динамічних рівнянь* (2) *рівномірно дисипативна по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ та λ. Тоді система диференціальних рівнянь* (1) *рівномірно дисипативна по t_0 при $t_0 > 0$.*

Theorem 4. *Припустимо $X(t,x)$ задовольняє умову* (3)*, а система диференціальних рівнянь* (1) *рівномірно дисипативна по t_0 при $t_0 > 0$. Тоді, існує таке λ_0, що динамічна система* (2) *рівномірно дисипативна по t_0 і λ для всіх $\lambda \leq \lambda_0$.*

Література

[1] Agarwal R., Hazarika B., Tikare S. Dynamic Equations on Time Scales and Applications (1st ed.). Chapman and Hall/CRC, 2024. DOI: 10.1201/9781003467908.

[2] Akin-Bohner E., Raffoul Y. Boundedness in functional dynamic equations on time scales // Advances in Difference Equations. 2006. Vol. 2006. P. 1–18. DOI: 10.1155/ADE/2006/79689.

[3] Karpenko O., Stanzhytskyi O.and Dobrodzii T. The relation between the existence of bounded global solutions of the differential equations and equations on time scales // Turkish Journal of Mathematics. 2020. Vol. 44. P. 2099—2112. DOI: 10.3906/mat-2006-79.

[4] Tsan V., Perestyuk Y., Mogylova V. Relationship Between Bounded Solutions of Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 279, no. 3. P. 414–437.

[5] Bohner M., Karpenko O., Stanzhytskyi O. Oscillation of solutions of second-order linear differential equations and corresponding difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2014. Vol. 20, no. 7. P. 1112–1126. DOI: 10.1080/10236198.2014.893297.

[6] Stanzhytskyi O., Uteshova R., Tsan V., and Khaletska Z. On the relation between oscillation of solutions of differential equations and corresponding equations on time scales // Turkish Journal of Mathematics. 2023. Vol. 47, no. 2. P. 476– 501.

[7] Bohner M., Kenzhebaev K., Lavrova O. and Stanzhytskyi O. Pontryagin maximum principle for dynamic systems on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2017. Vol.23, no.7. P. 1161–1189. doi:10.1080/10236198.2017.1284829.

[8] Bourdin L., Stanzhytskyi O., Trelat E. Addendum to Pontryagin maximum principle for dynamic systems on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2017. Vol. 23, no. 10. P. 1760–1763. DOI: 10.1080/10236198.2017.1363194.

[9] Lavrova O., Danilov O., Stanzhytskyi O. Viscous solutions for the Bellman equation on the time scales // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 69, no. 7. P. 933–950. Access mode: http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0000778687.

[10] Stanzhytskyi O., Mogylova V. and Lavrova O. Optimal Control for Systems of Differential Equations on the Infinite Interval of Time Scale. Understanding Complex Systems In: Sadovnichiy, V. A. and Zgurovsky, M. Z. (Eds.). Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Springer, Cham. 2020. P. 395–405 doi:10.1007/978-3-030-50302-4_18.

[11] Yoshizawa T. Stability Theory by Lyapunovs Second Method. Tokyo, Japan: The Mathematical Society of Japan, 1966.

[12] Bourdin L., Trelat E. General Cauchy-Lipschitz theory for Δ-Cauchy problems with Carathodory dynamics on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2014. Vol.20, no. 4. P. 526–547. DOI: 10.1080/10236198.2013.862358.

e-mail: dmytrobobyliev@gmail.com

Дослідження поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у частинних похідних з випадковими параметрами в правій частині

Ігор Юрченко, Володимир Ясинський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором $(\Omega, F, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, $\mathrm{F} \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ – фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega)$ є вимірною з імовірністю одиниця за t та x відносно мінімальної σ-алгебри $B\left([0, T], \mathrm{R}^1\right)$ борелевих множин на площині та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\left\{|u(t, x, \omega)|^2\right\} dx < \infty$$

для всіх $t \in [0, T]$, $\mathrm{E}\{\bullet\}$ – математичне сподівання, $T \subset [0, \infty)$ [1,2]. Простір функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, що володіє властивістю інтегровності, позначимо через $\mathfrak{M}_T$. У просторі $\mathfrak{M}_T$ слід ввести норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathrm{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx\right]^2 dt.$$

Позначимо через

$$Q(A, q, p) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj} q^k p^j,$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}$ – дійснозначна матриця розмірності $n \times m$, складена з елементів $a_{kj} \in \mathrm{R}^1$. Розглянемо на $(\Omega, F, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ задачу Коші для СДРЧП вигляду [3,4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\right] + Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) =$$

$$= \varphi(\xi(\omega))\, Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt},$$

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\Big|_{t=0} = [Qu]_0,$$

$B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij} \in \mathrm{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij} \in \mathrm{R}^1$, $\varphi(\bullet)$ – берівська функція з областю значень R^1, $\xi(\omega)$ – випадкова величина, задана щільністю $p_\xi(x)$ (або функцією розподілу), $w(t, \omega)$ – одновимірний вінерів процес, при цьому $\xi(\omega)$ не залежить від $w(t, \omega)$.

Отримані результати щодо поведінки в середньому квадратичному сильного розв'язку даного рівняння (див. [3–7]).

Список літератури

1. Гіхман Й.І., Скороход А.В. Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними.– Київ: Ін-т математики АН УРСР, 1981.– С.25–59.

2. Перун Г.М., Ясинський В.К. Дослідження задачі Коші для стохастичних рівнянь у частинних похідних // Укр. мат. журн.– 1993.– Т.45, № 9.– С.1773–1781.

3. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.– 2015.– Vol.51, №1.– P.56–63.

4. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Existence of Lyapunov–Krasovskii Functionals for Stochastic Functional Differential Ito–Skorokhod Equations under the Condition of Solutions' Stability on Probability with Finite Aftereffect // Cybernetics and Systems Analysis.– 2018.– Vol.54, №6.– P.957–970.

5. Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables // Cybernetics and Systems Analysis.– 2020.– Vol.56, №2.– P.303–311.

6. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Existence of the Solution to the Cauchy Problem for Nonlinear Stochastic Partial Differential-Difference Equations of Neutral Type // Cybernetics and Systems Analysis.– 2021.– Vol.57, №5.– P.764–774.

7. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Mean-Square Stability and Instability Criteria for the Gikhman–Ito Stochastic Diffusion Functional Differential Systems Subject to External Disturbances of the Type of Random Variables // Cybernetics and Systems Analysis.– 2023.– Vol.59, №2.– P.283–295.

e-mail: i.yurchenko@chnu.edu.ua

On the solvability of the nonlinear nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations

Perizat Abdimanapova
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan

We consider the nonlinear nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations on $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0,T]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$g(x, u_x(x, 0), u_x(x, T)) = 0, \tag{3}$$

where $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ and $g : [0, \omega] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ are continuous.

By using the new unknown function $v(x, t) = u_x(x, t)$, we reduce the problem (1)-(3) to the equivalent boundary value problem for a partial integro-differential equation.

A multi-point nonlinear boundary value problem for integro-differential equations with parameters equivalent to the problem under consideration is composed according to the scheme of the parameterisation method and an algorithm for its solution is proposed [1, 2].

The convergence conditions of the proposed algorithms are obtained, i.e. sufficient conditions for the existence of an isolated solution in some set of the family of nonlinear boundary value problems for integro-differential equations are determined.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No AP23488811).

1. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Comput. Maths. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.
2. Temesheva S.M., Abdimanapova P.B. On a Solution of a Nonlinear Nonlocal Boundary Value Problem for one Class of Hyperbolic Equation, *Lobachevskii journal of mathematics*, 44:7 (2023), 2529–2542.

e-mail: peryzat74@mail.ru

On the branched continued fraction expansions of some ratios of the generalized hypergeometric function ${}_4F_3$

Tamara Antonova, Yevhenii Lutsiv
Lviv Polytechnic National University
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

The generalized hypergeometric function ${}_4F_3$ defined as power series (see, [1])

$$ {}_4F_3(a_1,a_2,a_3,a_4;b_1,b_2,b_3;z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n(a_4)_n}{(b_1)_n(b_2)_n(b_3)_n}\frac{z^n}{n!}, \quad (1)$$

where the pameters $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3$ are complex number, herewith $b_1,b_2,b_3\notin\{0,-1,-2,\ldots\}$, and, for $n\ge1$, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)_{n-1}$ with $(\alpha)_0=1$.

Using the idea proposed in [2], we have constructed an expansion for the ratios of the function (1). We have used the concept of defining a branched continued fraction proposed in [3].

Let $\mathcal{G}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. We choose from $\mathcal{G}^2$, $\mathcal{G}^2=\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, the following subset of double indices

$$\begin{aligned}G=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\&(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}.\end{aligned}$$

For $k\ge1$ let $I_{k-1}^{(2)}=(i_{k-1}^{(1)},i_{k-1}^{(2)})$ be a double index from a set G,

$$\mathcal{I}_k^{(2)}=(I_0^{(2)},I_1^{(2)},\ldots,I_k^{(2)})=(i_0^{(1)},i_0^{(2)},i_1^{(1)},i_1^{(2)},\ldots,i_k^{(1)},i_k^{(2)})$$

be a double multiindex,

$$i_k^{(2)}=\begin{cases}i_{k-1}^{(2)}, \quad \text{if} \quad i_{k-1}^{(1)}=1,\ 1\le i_{k-1}^{(2)}\le4,\ i_k^{(1)}=3,\\ i_{k-1}^{(2)}+1-4[i_{k-1}^{(2)}/4], \quad \text{if} \quad i_{k-1}^{(1)}=2,\ 1\le i_{k-1}^{(2)}\le8,\ i_k^{(1)}=3,\\ i_{k-1}^{(2)}+6-4[(i_{k-1}^{(2)}+1)/4]-4\delta^1_{[(i_{k-1}^{(2)}-1)/4]},\\ \qquad \text{if} \quad i_{k-1}^{(1)}=i_k^{(1)}=2,\ 1\le i_{k-1}^{(2)}\le8,\\ i_{k-1}^{(2)}-1+4\delta^1_{i_{k-1}^{(2)}}, \quad \text{if} \quad i_{k-1}^{(1)}=i_k^{(1)}=3,\ 1\le i_{k-1}^{(2)}\le4,\\ i_{k-1}^{(2)}, \quad \text{if} \quad i_{k-1}^{(1)}=3,\ 1\le i_{k-1}^{(2)}\le4,\ 1\le i_k^{(1)}\le2,\end{cases} \quad (2)$$

where δ_p^q denotes the Kronecker delta, $[\cdot]$ denotes an integer part of a number,

$$G(\mathcal{I}_{k-1}^{(2)})=\{I_k^{(2)}:\ 4-i_{k-1}^{(1)}\le i_k^{(1)}\le3,\ i_k^{(2)}\text{ is defined by (2)}\}$$

be a subset of G herewith $G(\mathcal{I}_0^{(2)})=G(I_0^{(2)})$, and let

$$\mathcal{J}^{(2)}=\{\mathcal{I}_k^{(2)}:\ I_p^{(2)}\in G(\mathcal{I}_{p-1}^{(2)}),\ 1\le p\le k,\ k\ge1\}$$

be a set of double multiindices.

We set $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{e}_{1,i}=(\delta_i^1,\delta_i^2,\delta_i^3,\delta_i^4)$, $\mathbf{f}_{1,i}=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_{3,i}=(1-\delta_i^1,1-\delta_i^2,1-\delta_i^3,1-\delta_i^4)$, $\mathbf{f}_{3,i}=(1,1,1)$, $1\le i\le4$, and

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{2,i}=(&\delta^1_{i-4[(i-1)/4]}+\delta^4_{i-4[(i-1)/4]},\delta^1_{i-4[(i-1)/4]}+\delta^2_{i-4[(i-1)/4]},\delta^2_{i-4[(i-1)/4]}\\&+\delta^3_{i-4[(i-1)/4]},\delta^3_{i-4[(i-1)/4]}+\delta^4_{i-4[(i-1)/4]}),\\ \mathbf{f}_{2,i}=(&1,\delta^0_{[(i-1)/4]},\delta^1_{[(i-1)/4]}),\end{aligned}$$

where $1\le i\le8$. Then, for $k\ge0$,

$$\mathbf{e}_{\mathcal{I}_k^{(2)}}=(e^1_{\mathcal{I}_k^{(2)}},e^2_{\mathcal{I}_k^{(2)}},e^3_{\mathcal{I}_k^{(2)}},e^4_{\mathcal{I}_k^{(2)}})=\mathbf{e}_{I_0^{(2)}}+\mathbf{e}_{I_1^{(2)}}+\ldots+\mathbf{e}_{I_k^{(2)}},$$

where

$$e^1_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=\sum_{p=0}^{k}(\delta^1_{i^{(1)}_p}\delta^1_{i^{(2)}_p}+\delta^3_{i^{(1)}_p}(1-\delta^1_{i^{(2)}_p})+\delta^2_{i^{(1)}_p}(\delta^1_{i^{(2)}_p}+\delta^4_{i^{(2)}_p}+\delta^5_{i^{(2)}_p}+\delta^8_{i^{(2)}_p})),$$

$$e^2_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=\sum_{p=0}^{k}(\delta^1_{i^{(1)}_p}\delta^2_{i^{(2)}_p}+\delta^3_{i^{(1)}_p}(1-\delta^2_{i^{(2)}_p})+\delta^2_{i^{(1)}_p}(\delta^1_{i^{(2)}_p}+\delta^2_{i^{(2)}_p}+\delta^5_{i^{(2)}_p}+\delta^6_{i^{(2)}_p})),$$

$$e^3_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=\sum_{p=0}^{k}(\delta^1_{i^{(1)}_p}\delta^3_{i^{(2)}_p}+\delta^3_{i^{(1)}_p}(1-\delta^3_{i^{(2)}_p})+\delta^2_{i^{(1)}_p}(\delta^2_{i^{(2)}_p}+\delta^3_{i^{(2)}_p}+\delta^6_{i^{(2)}_p}+\delta^7_{i^{(2)}_p})),$$

$$e^4_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=\sum_{p=0}^{k}(\delta^1_{i^{(1)}_p}\delta^4_{i^{(2)}_p}+\delta^3_{i^{(1)}_p}(1-\delta^4_{i^{(2)}_p})+\delta^2_{i^{(1)}_p}(\delta^3_{i^{(2)}_p}+\delta^4_{i^{(2)}_p}+\delta^7_{i^{(2)}_p}+\delta^8_{i^{(2)}_p})),$$

and

$$\mathbf{f}_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=(f^1_{\mathcal{I}^{(2)}_k},f^2_{\mathcal{I}^{(2)}_k},f^3_{\mathcal{I}^{(2)}_k})=\mathbf{f}_{I^{(2)}_0}+\mathbf{f}_{I^{(2)}_1}+\ldots+\mathbf{f}_{I^{(2)}_k},$$

where

$$f^1_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=k+1,$$

$$f^2_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=\sum_{p=0}^{k}(\delta^3_{i^{(1)}_p}+\delta^2_{i^{(1)}_p}(\delta^1_{i^{(2)}_p}+\delta^2_{i^{(2)}_p}+\delta^3_{i^{(2)}_p}+\delta^4_{i^{(2)}_p})),$$

$$f^3_{\mathcal{I}^{(2)}_k}=\sum_{q=0}^{k}(\delta^3_{i^{(1)}_p}+\delta^2_{i^{(1)}_p}(\delta^5_{i^{(2)}_p}+\delta^6_{i^{(2)}_p}+\delta^7_{i^{(2)}_p}+\delta^8_{i^{(2)}_p})).$$

Theorem 1. *For each $I^{(2)}_0\in G$ the ratio $R_{I^{(2)}_0}(\mathbf{a};\mathbf{b};z)=\dfrac{{}_4F_3(\mathbf{a};\mathbf{b};z)}{{}_4F_3(\mathbf{a}+\mathbf{e}_{I^{(2)}_0};\mathbf{b}+\mathbf{f}_{I^{(2)}_0})}$ has a formal branched continued fraction expansion of the form*

$$1+\sum_{I^{(2)}_1\in G(\mathcal{I}^{(2)}_0)}\cfrac{d_{\mathcal{I}^{(2)}_1}z}{1+\sum_{I^{(2)}_2\in G(\mathcal{I}^{(2)}_1)}\cfrac{d_{\mathcal{I}^{(2)}_2}z}{1+\sum_{I^{(2)}_3\in G(\mathcal{I}^{(2)}_2)}\cfrac{d_{\mathcal{I}^{(2)}_3}z}{1+\ddots}}},$$

where $d_{\mathcal{I}^{(2)}_k}$, $\mathcal{I}^{(2)}_k\in\mathcal{J}^{(2)}$, depend on the parameters of ${}_4F_3$.

References

[1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge University Press (1999).

[2] T. Antonova, R. Dmytryshyn, S. Sharyn, *Generalized hypergeometric function ${}_3F_2$ ratios and branched continued fraction expansions*, Axioms, **10** (4), 310 (2021).

[3] T.M. Antonova, *On structure of branched continued fractions*, Carpathian Math. Publ., **16** (2), 391–400 (2024).

e-mail: tamara.m.antonova@lpnu.ua, yevhenii.lutsiv.20@pnu.edu.ua

Algebra and Geometry in Liners

Taras Banakh
Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine

We shall discuss the interplay between algebra and geometry in (affine or projective) liners, and also present selected open problems in this fascinating field of mathematics.

e-mail: tbanakh@gmail.com

On local asymptotic stabilization of a class of three-dimensional nonlinear systems with unknown parameters and additional terms

Maxim Bebiya

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

We address the stabilization problem for the following uncertain nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2^{2m+1} + f_1(t,x,u), \\ \dot{x}_2 = a_2 x_3 + f_2(t,x,u), \\ \dot{x}_3 = a_3 u, \end{cases} \tag{1}$$

where $u \in \mathbb{R}$ is a control input, $m > 0$ is a given integer number, $a_i > 0$ $(i = 1, 2)$ are unknown numbers, $f_i(t,x,u)$ $(i = 1, 2)$ are unknown continuous functions.

We assume that the functions $f_1(t,x,u)$ and $f_2(t,x,u)$ satisfy the condition

$$\begin{aligned} f_1(t,x,u) &\le c_1(|x_2|^{1+\delta_1} + |x_3|^2), \\ f_2(t,x,u) &\le c_2|x_3|^{1+\delta_2} \end{aligned} \tag{2}$$

for some constants $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ in a neighborhood of the origin. Note that we do not require c_1, c_2 , δ_1, and δ_2 to be known in advance.

Our objective is to construct a continuous control $u(x)$ that does not depend on the parameters a_i such that the zero equilibrium point of system (1) with $u = u(x)$ will be asymptotically stable in the sense of Lyapunov for any positive values of the parameters a_i and any functions $f_i(t,x,u)$ satisfying the condition (2).

Note that the stabilization problem for system (1) is difficult even for known parameters a_i because of the fact that this system has uncontrollable first (linear) approximation. The stabilization problem for the case of known parameters a_i for more general n-dimensional systems has been solved in [1], [2]. Linear stabilization for system (1) with known a_i has been considered in [3]. The case of linear systems ($m = 0$) with unknown a_i has been studied in [4].

Suppose that r_1, μ_1, and μ_2 are some real numbers such that $r_1 \ge 1$ and $\mu_1 > \mu_2 > 0$. Let $k_i > 0$ be arbitrary positive numbers. To stabilize system (1) we consider the following control law

$$u = -(((k_1 x_1)^{p_1} + k_2 x_2)^{p_2} + k_3 x_3), \tag{3}$$

where $p_1 = \frac{r_2}{r_1}$, $p_2 = \frac{r_3}{r_2}$ with $r_2 = r_1 + \mu_1$, $r_3 = r_2 + \mu_2$.

We show that the control $u = u(x)$ of the form (3) stabilizes system (1) for any set of positive numbers a_i and any functions $f_i(t,x,u)$ under the condition (2).

References

[1] M.O. Bebiya and V.I. Korobov. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry – 2016. – 12, No. 2. – P. 113–133.

[2] V.I. Korobov and M.O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems // Automation and Remote Control – 2017. – 78, No. 1. – P. 1–15.

[3] M.O. Bebiya and V.A. Maistruk. On linear stabilization of a class of nonlinear systems in a critical case // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2023. – 98. – P. 36–49.

[4] J. Zhu and C. Qian. Local asymptotic stabilization for a class of uncertain uppertriangular systems. // Automatica – 2020 – 118, 108954.

e-mail: m.bebiya@karazin.ua

Symmetric Polynomials on Infinite-Dimensional Structures

Vitalii Bihun, Rostyslav Stakhiv, Andriy Zagorodnyuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let X be an infinite dimensional complex linear space. It is well-known that X admits a (linear) Hamel basis. That is, there exists a linearly independent family $\mathfrak{E} = (e_\alpha)$ of vectors in X such that every vector $x \in X$ can be represented as a finite algebraic combination of elements in $\mathfrak{E}$, where α belong to a set of indexes $\mathfrak{A}$. We will write

$$x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha e_\alpha, \quad x_\alpha \in \mathbb{C}$$

understanding that only a finite number of coordinates x_α are not equal to zero.

A mapping f on X is called $\mathfrak{E}$-*symmetric* (or just *symmetric* if the basis is fixed) if for every one-to-one map $\sigma\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ we have

$$f\Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha e_{\sigma(\alpha)}\Big) = f\Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha e_\alpha\Big).$$

Theorem 1. *Polynomials*

$$F_k^{\mathfrak{e}}(x) = F_k(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha^k, \quad x \in X, \quad k \in \mathbb{N}$$

form an algebraic basis in the algebra of all $\mathfrak{E}$-symmetric polynomials on X.

Example 2. *Let c_{00} be the space of eventually finite sequences. That is, every $x \in c_{00}$ is of the form*

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \quad x_n \in \mathbb{C},$$

where $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0 \ldots)$ and only a finite number of coordinates x_n are not equal to zero. Then (e_n) is a countable Hamel basis in c_{00} and polynomials

$$F_k\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k$$

form an algebraic basis in the algebra$\mathcal{P}_s(c_{00})$ of symmetric polynomials on c_{00}.

Proposition 2. *Let X be an infinite-dimensional linear space with a Hamel basis $\mathfrak{E}$, then the algebra of all $\mathfrak{E}$-symmetric polynomials $\mathcal{P}_{s\mathfrak{E}}(X)$ is isomorphic to $\mathcal{P}_s(c_{00})$.*

In the talk we consider algebras of symmetric polynomials on zero-sets of polynomials on infinite-dimensional complex linear spaces.

e-mail: andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua

Representation of Lie algebras associated with Sylow p-subgroups of symmetryc groups by zero-triangular matrices

Natalia Bondarenko

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

Let p be a prime number and n be a fixed integer, $n > 2$. We consider the Lie algebra $L_{p,n}$ associated with the lower central series of the Sylow p-subgroup P_n of the symmetryc group S_{p^n}. The elements of the Lie algebra $L_{p,n}$ have a spacial tableau representation ([1], [2]) similar to the tableau representation of the elements of the Sylow p-subgroup P_n of the symmetric group S_{p^n} constructed by L.A. Kaloujnine [3]. Embedding of the Lie algebra of zero-triangular matrices $T_n(p)$ into the the Lie algebra $L_{p,n}$ was done in the work [4]. In the case $p = 2$ we construct the isomorphic embeding of the Lie algebras $L_{2,n}$ into the Lie algebra of zero-triangular matrices $T_m(2)$ over the field $\mathbb{F}_2$ of the lowest possible order $m = 2^{n-1} + 1$, similarly to the matrix representation of the n-iterated wreath product of cyclic groups C_2 constructed in Leonov's work [5].

The elements of the Lie algebra $L_{2,n}$ can be identified with the tableaux of the form

$$u = [u_1, u_2(x_1), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_{n-1})], \tag{1}$$

where $u_1 \in \mathbb{F}_2$, $u_i(x_1, ..., x_{i-1}) \in \mathbb{F}_2^{(0)}[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ for $i = 2, 3, \ldots, n$ are reduced polynomials with respect to the ideal I_i generated by polynomials $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{i-1}^2$. The k-th coordinate of the tableau $u \in L_{2,n}$ is denoted by the symbol u_k .

The operations of the addition, the multiplication on the elements of the field $\mathbb{F}_2$ of such tableaux (1) are determined coordinately, and the Lie bracket (,) for tableaux $u, v \in L_n$ is determined by the following equalities $(1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m)$:

$$(u, v)_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \cdot u_i - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot v_i \right). \tag{2}$$

The height of a monomial $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_s^{k_s}$ is called the number $h(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_s^{k_s}) = 1 + k_1 + 2k_2 + \cdots 2^{s-1} k_s$. The height $h(u_s(x_1, ..., x_{s-1}))$ of a reduced polynomial $u_s(x_1, ..., x_{s-1})$ is the largest of the heights of its monomials with a non-zero coefficient. The height of the reduced polynomial $u_s(x_1, ..., x_{s-1})$ satisfies the inequality $0 \leq h(u_s(x_1, ..., x_{s-1})) \leq 2^{s-1}$.

An arbitrary reduced polynomial can be uniquely represented as a sum of monomials of pairwise different heights $u_s(x_1, ..., x_{s-1}) = \sum_{j=1}^{2^{s-1}} u_{sj} t(j)$, where $t(j)$ is a monomial of the heights j $(1 \leq j \leq 2^{s-1})$, $t(1) = 1$ and $u_{sj} \in \mathbb{F}_2$.

For an arbitrary polynomial $g \in \mathbb{F}_2^{(0)}[x_1, ..., x_{n-1}]$ of the height j we define the tableau $\bar{g} \in L_{2,n}$ so that its first $(n-1)$ coordinates are equal to zero, and the n-th coordinate contains the polynomial g, i.e. $\bar{g} = [0, 0, ..., g] \in L_{2,n}$. For an arbitrary tableu $u \in L_{2,n}$, consider the tableau of the form

$$\bar{g}^u = (u, \bar{g}) = [0, ..., 0, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot u_i]. \tag{3}$$

For an arbitrary tableau $u \in L_{2,n}$ the height of the polinomial on the last coordinate is limited by the number 2^{n-1}. Consider the monomials $t(j)$ of the heights $j \in \{1, 2, ..., 2^{n-1} + 1\}$ and polynomials

$$t(j)^u = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial t(j)}{\partial x_k} \cdot u_k = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} \cdot t(i). \tag{4}$$

We define a zero-triangular matrix $A = (A_{ij})_{m \times m}$ of the order $m = 2^{n-1}$ by the condition

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases} \tag{5}$$

Theorem 1. *For an arbitrary $n \geq 1$ the mapping $\varphi_n : L_{2,n} \to T_{2^{n-1}+1}(2)$, defined by the equality $\varphi_n(u) = A$, is a monomorphism. In addition, for an arbitrary accurate representation $\pi : L_{2,n} \to T_k(2)$ the inequality $k \geq 2^{n-1} + 1$ holds.*

References

[1] Suschanskiy V.I., Netreba N.V. (2005). Lie algebras associated with Sylow p-subgroups of finite symmetric groups *Mathematical studies*, vol. 24 (2), pp. 127–138.

[2] Suschanskiy V.I., Bondarenko N.V. (2005). Wreath product of Lie algebras and Lie algebras associated with Sylow p-subgroups of finite symmetric groups *Algebra and Discrete Mathematics*, vol. 4, pp. 122–132.

[3] Kaloujnine L.A. (1948). La structure des p–groupes de Sylow des groupes symetriques finis *Ann. Sci de l'Ecole Norm. Super.*, vol. 65, no. 3, pp. 239–276.

[4] Bondarenko N.V. (2006). Lie algebras associated with Sylow p-subgroups of some classical linear groups *Bulletin of Kyiv University. Series: physical and mathematical sciences.*, vol. 2, pp. 21–27.

[5] Leonov Yu.H. (2004). Representation of finite-approximate 2-groups by infinite unitriangular matrices over a field of two elements *Mathematical studies*, vol. 22(2), pp. 134–140.

e-mail: natvbond@gmail.com

On the approximation of systems with delay and their stability

Ihor Cherevko, Svitlana Ilika, Oleksandr Matwiy, Larysa Piddubna
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Schemes for approximating differential-difference equations by special schemes of ordinary differential equations are proposed in the work [1]. Further research was found in various functional spaces [2,3].

Consider the Cauchy problem for a delayed differential equation

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0] \tag{2}$$

where $x \in R^n$, $\tau > 0$, $t_0 \in R$, $F(t, u, v)$ is a continuous function.

Equation (1) corresponds to an approximating system

$$\begin{aligned} \frac{dt_0}{dt} &= F\left(t, z_0, z_m\right) \\ \frac{dz_j}{dt} &= \frac{m}{\tau}\left(t_{j-1}(t) - z_j(t)\right), j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$z_j\left(t_0\right) = \varphi\left(t_0 - \frac{j\tau}{m}\right), j = \overline{0, m} \tag{4}$$

Theorem 1 [2]. *If the solution of the problem (1)–(2) $x(t) \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, T])$, then*

$$\left| x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t) \right| \leq \beta\left(\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)\right), j = \overline{0, m}, t \in \left[t_0, T\right],$$

where $\beta(\delta) \to 0$ npu $\delta \to 0$, $\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)$ – the continuity modulus of the function $x(t)$ on $[t_0 - \tau, T]$.

The study of approximation of linear stationary systems with a delay allowed us to construct algorithms for approximate detection of nonasymptotic roots of quasipolynomials. Using these algorithms, a method for modelling the stability of solutions of linear systems is developed [2,3].

Consider the initial problem for a linear system with many delays

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x\left(t - \tau_i\right). \tag{5}$$

where A, B_i, $i = \overline{1, k}$ fixed $n \times n$ matrix, $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k = \tau$. Let us correspond to the equation (5) the system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= A(t) z_0(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i z_{l_i}(t), \ l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau}\right], \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right), \ j = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}, m \in N. \end{aligned} \tag{6}$$

Theorem 2 [2]. *If the zero solution of the system with delay (1) is exponentially stable (not stable), then there is $m_0 > 0$ such that for all $m > m_0$, the zero solution of the approximating system (3) is also exponentially stable (not stable). If for all $m > m_0$ the zero solution of the approximation system (3) is exponentially stable (not stable) then the zero solution of the system with a delay (1) is exponentially stable (not stable).*

Theorem 2 can be applied for finding the upper limit of the delay in the system (5) which has stability. Calculating the approximate roots of the quasi-polynomial of a linear system (5) with different τ, we can estimate the upper value of the delay τ, for which the system (5) is stable [4].

Using the approximate finding algorithms for nonasymptotic roots of quasi-polynomials, a way for constructing the coefficient areas of stability for linear differential equations with delay and finding the set of delay values for which the equation is asymptotically stable is suggested [5,6].

Performed numerical experiments for model test examples confirm the effectiveness of proposed schemes for modeling the linear differential equations with delay.

1. Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations, A. Halanay. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155–197.

2. Matviy O.V., Cherevko I.M. About approximation of system with delay and them stability, Nonlinear oscilations. – 2004. – **7**, No.2. – P. 208–216.

3. Ilika S.A., Piddubna L.A., Tuzyk I.I., Cherevko I.M. Approximation of linear differen-tial-difference equations and their application, Bukovinian Mathematical Journal. – 2018. – **6**, No.3–4. – P. 80–83.

4. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. 2021 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15–17 September 2021. P. 49–52.

5. Cherevko I., Klevchuk I., Pernay S. Building of stability regions of linear differential-difference equations, Adv. Academy of Sciences of Ukraine. – 2012. – No.7. - P. 28–34.

6. Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay, 12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, 26–28 September 2022, Spisska Kapitula, Slovakia. P. 164–167.

Representation of the Spectrum of the Algebra of Symmetric Analytic Functions of Bounded Type on a Banach space

Iryna Chernega

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine

Let X be a Banach space and $\mathcal{S}$ be a group of isometric operators on X. A mapping f on X is said to be $\mathcal{S}$-*symmetric* if it is invariant with respect to the action of operators in $\mathcal{S}$.

An analytic function f on X is a function of *bounded type* if it is bounded on all bounded subsets of X. The algebra of all analytic functions of bounded type on a complex Banach space X is denoted by $H_b(X)$ and it is a Fréchet algebra with respect to the metrizable topology generated by the following countable family of norms

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \le r} |f(x)|, \quad r \in \mathbb{Q}_+, \quad f \in H_b(X).$$

Due to the Gelfand theory, for a given commutative topological algebra it is important to know the spectrum, that is, the set of continuous complex homomorphisms (characters) of the algebra.

In the case $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, and $\mathcal{S}$ the group of permutations of the canonical basis vectors, the $\mathcal{S}$-symmetric functions are called *symmetric*. The algebra of symmetric analytic functions with the topology of the uniform convergence on bounded sets is denoted by $H_{bs}(\ell_p)$. We use the notation $M_{bs}(\ell_p)$ for its spectrum.

In this talk we consider a complete description of the spectrum $M_{bs}(\ell_1)$.

This research was supported by the National Research Foundation of Ukraine, 2023.03/0198 "Analysis of the spectra of countably generated algebras of symmetric polynomials and possible applications in quantum mechanics and computer science"

e-mail: icherneha@ukr.net

Rings of Multinumbers Associated with the Complex Structure

Yurii Chopiuk, Andriy Zagorodnyuk
Kyiv School of Economics, Kyiv, Ukraine
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

A ring of multisets $\mathcal{M}_0$ was constructed in [1] using symmetric and supersymmetric polynomials on a Banach space. $\mathcal{M}_0$ can be represented by the following way. Let $c_{00}(\mathbb{N}^2)$ be the space of two-sides sequences of complex numbers of the form

$$(y|x) = (\dots, y_m, \dots, y_1|x_1, \dots, x_n, \dots)$$

such that only a finite number of coordinates x_n and y_m are non-zero. We say that $(y|x) \sim (y'|x')$ if and only if

$$T_k(y|x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k - \sum_{n=1}^{\infty} y_n^k = T_k(y'|x'), \quad k \in \mathbb{N}.$$

The quotient set $c_{00}(\mathbb{N}^2)$ with respect to the equivalence is denoted by $\mathcal{M}_0$ and can be considered as a set of Cartesian products of finite multisets of complex numbers. $\mathcal{M}_0$ is a ring with respect to some natural algebraic operations which we will consider in more general situation. Note that polynomials T_k form an algebraic basis in the algebra of supersymmetric polynomials [1]. Some properties and applications of $\mathcal{M}_0$ can be found in [2].

Let $[(y|x)], [(t|s)] \in \mathcal{M}_0$. We define by

$$[z]_{\mathcal{I}} = \left[\begin{pmatrix} y & | & x \\ t & | & s \end{pmatrix}\right] = [(y|x)] + \mathcal{I}[(t|s)], \tag{1}$$

where $\mathcal{I}$ is an imaginary unit for multinumbers and $\Re([z]_{\mathcal{I}}) = [(y|x)], \Im([z]_{\mathcal{I}}) = [(t|s)]$.

We denote by $\mathcal{M}_0[\mathcal{I}]$ the set of all elements of the form (1).

Using ideas described in [2] we introduce algebraic operations on $\mathcal{M}_0[\mathcal{I}]$.

Let $[z_1]_{\mathcal{I}} = \left[\begin{pmatrix} y_1 & | & x_1 \\ t_1 & | & s_1 \end{pmatrix}\right]$, $[z_2]_{\mathcal{I}} = \left[\begin{pmatrix} y_2 & | & x_2 \\ t_2 & | & s_2 \end{pmatrix}\right] \in \mathcal{M}_0[\mathcal{I}]$.

$$[z_1]_{\mathcal{I}} + [z_2]_{\mathcal{I}} = \left[\begin{pmatrix} y_1 & | & x_1 \\ t_1 & | & s_1 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} y_2 & | & x_2 \\ t_2 & | & s_2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} y_1 \bullet y_2 & | & x_1 \bullet x_2 \\ t_1 \bullet t_2 & | & s_1 \bullet s_2 \end{pmatrix}\right].$$

The inverse element can be expressed as

$$-[z]_{\mathcal{I}} = -\left[\begin{pmatrix} y & | & x \\ t & | & s \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} x & | & y \\ s & | & t \end{pmatrix}\right]$$

and next equality holds

$$\mathcal{I}[a]\mathcal{I}[b] = -[a][b].$$

The second operation is defined as

$$[z_1]_{\mathcal{I}}[z_2]_{\mathcal{I}} = \left[\begin{pmatrix} y_1 & | & x_1 \\ t_1 & | & s_1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} y_2 & | & x_2 \\ t_2 & | & s_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} (y_1 \diamond x_2) \bullet (x_1 \diamond y_2) \bullet (s_1 \diamond s_2) \bullet (t_1 \diamond t_2) | (x_1 \diamond x_2) \bullet (y_1 \diamond y_2) \bullet (t_1 \diamond s_2) \bullet (s_1 \diamond t_2) \\ (t_1 \diamond x_2) \bullet (s_1 \diamond y_2) \bullet (t_2 \diamond x_1) \bullet (s_2 \diamond y_1) | (s_1 \diamond x_2) \bullet (t_1 \diamond y_2) \bullet (s_2 \diamond x_1) \bullet (t_2 \diamond y_1) \end{pmatrix}\right].$$

Note that

$$\Re([z]_{\mathcal{I}}) = [(y|x)] \in \mathcal{M}_0 \quad \text{and} \quad \Im([z]_{\mathcal{I}}) = [(t|s)] \in \mathcal{M}_0.$$

The set of all $n \times n$ matrices with entries in R is a matrix ring denoted $M_n(R)$, and there exists an isomorphism between complex numbers $a + bi$, where $a, b \in \mathbb{R}$ and quadratic matrices $M_2(\mathbb{R})$ of a form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Let us consider a map $\mathcal{A} : \mathcal{M}_0[\mathcal{I}] \to M_2(\mathcal{M}_0)$

$$\mathcal{A}([z]_{\mathcal{I}}) = \begin{pmatrix} \Re([z]_{\mathcal{I}}) & \Im([z]_{\mathcal{I}}) \\ -\Im([z]_{\mathcal{I}}) & \Re([z]_{\mathcal{I}}) \end{pmatrix}.$$

Theorem 1. *The map $\mathcal{A} : \mathcal{M}_0[\mathcal{I}] \to M_2(\mathcal{M}_0)$ is an isomorphism.*

Corollary 1. *$\mathcal{M}_0[\mathcal{I}]$ is a commutative ring that is isomorphic to commutative ring of quadratic matrices $M_2(\mathcal{M}_0)$.*

It is easy to check that:

$$\begin{pmatrix} [(-1|1)] & 0 \\ 0 & [(-1|1)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [(0|1,-1)] & 0 \\ 0 & [(0|1,-1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence, $\mathcal{M}_0[\mathcal{I}]$ is not an integral domain.

Theorem 2. *The ring $M_2(\mathcal{Z})$ is an integral domain.*

Corollary 2. *$\mathcal{Z}[\mathcal{I}]$ is an integral domain and every element in $\mathcal{Z}[\mathcal{I}]$ has a unique representation by the product of irreducible elements.*

[1] Jawad, F.; Zagorodnyuk, A. Supersymmetric polynomials on the space of absolutely convergent series. Symmetry 2019, 11, 1111.

[2] Chopyuk, Y.; Vasylyshyn, T.; Zagorodnyuk, A. Rings of Multisets and Integer Multinumbers. Mathematics 2022, 10, 778.

e-mail: yurii.chopiuk.19@pnu.edu.ua

ONE VERSION OF THE ABSTRACT THEOREM WIENER-PALEY

Svitlana Dimitrova, Natalia Girya
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine
Vasyl Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

Many classical theorems for numerical complex-valued functions can be successfully extended to more general Banach spaces. However, this introduces challenges both in the formulation and in preserving the validity of the classical results in the generalized context. For example, this is the case with the Wiener-Paley theorem [1], [4]. In his work [3], M. A. Kandil proved the Wiener-Paley theorem for functions belonging to the L_1 norm, for which the series $\sum_{-\infty}^{\infty}\|f(n)\| < \infty$ converges, as well as for functions taking values in a Hilbert space and belonging to the set $W_{\pi}^{(2)}(H)$.

On the other hand, M. A. Kandil constructed an abstract entire function $F(z)$,of exponential type 2π, whose values belong to the Banach space m, consisting of all bounded sequences $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ with the norm $\|x\| = \sup_n|\xi_n|$. Moreover, the norm of the function $F(x)$ on the real axis belongs to the space $L_2(-\infty;+\infty)$, while the norm of the Fourier transform of $F(x)$ does not belong to $L_2(-2\pi;+2\pi)$.

This result demonstrated that the Wiener-Paley theorem, which asserts the equivalence of a function and its Fourier transform belonging to the L_2 space on certain intervals, does not hold in the case of abstract functions, at least in its standard formulation. M.A. Kandil's result raised the question of which specific spaces allow for the generalization of the Wiener-Paley theorem and in what formulation.

Let us consider abstract entire analytic functions of a complex variable z ($z = x+iy$), defined by an everywhere convergent series:

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + ... + c_nz^n + ...,$$

where $c_i \in X$, X being a Banach space.

Definition 1. *A function $f(z)$ is called an entire function of exponential type σ ($f(z) \in B_\sigma$), if for any $\varepsilon > 0$ there exists a constant $A_\varepsilon > 0$, such that for all z,*

$$\|f(z)\| \le A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|},$$

and for the values $\hat{z}$ of some sequence,

$$\|f(\hat{z})\| > A_\varepsilon e^{(\sigma-\varepsilon)|\hat{z}|},$$

or

$$\sigma = \overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln\|f(z)\|}{|z|}.$$

Definition 2. *The notation $W_{(*,\sigma)}^{(2)}$ denotes the class of abstract functions of exponential type σ, bounded on the real axis, which are weakly absolutely square-integrable on the axis.*

$$f \in W_{(*,\sigma)}^{(2)} \equiv \begin{cases} 1.\ f(x) \in B_\sigma \\ 2.\ \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |\langle x^*, f(x)\rangle| < \infty, \forall x^* \in X^* \\ 3.\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle x^*, f(x)\rangle|^2 dx < \infty, \forall x^* \in X^* \end{cases}$$

Let us extend the Wiener-Paley theorem for numerical functions to Banach spaces not containing c_0 (the space of sequences converging to zero) as follows: We prove the following theorems.

Theorem 1. *If Banach space X not containing c_0 then the class of functions $W_{*,\sigma}^{(2)}$ coincides with the class of functions that can be represented in the form:*

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\phi(t)e^{izt}dt,$$

where $\phi(t) \in X, \langle x^*, \phi(t)\rangle \in L_2(-\sigma,\sigma), \forall x^* \in X^*, z = x+iy$.

References

[1] N.I. Akhiezer. *Lectures on Approximation Theory.* Nauka, M., 1965, 408p.

[2] D.B. Dimitrov. *A Note on the Gelfand Integral.* Functional Analysis and Its Applications. V.5 No.2 (1971), p.84-85.

[3] M.A. Kandil. *On the Wiener-Paley Theorem and Some Other Problems in the Theory of Abstract Entire Functions.* Mathematical Collection, V. 73(115), No.3, 1967, p.305-319.

[4] B.Ya. Levin. *Distribution of Zeros of Entire Functions.* State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, V.4, No.4 M., 1956, 633p.

e-mail: s.dimitrovaburlayenko@gmail.com, n82girya@gmail.com

Nonlinear Backward Shifts on the Ring of Multisets

Daryna Dolishniak, Pavlo Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let X be a metric space and T be a continuous mapping $T\colon X \to X$. We say that the sequence of maps $\{T^n\}$, $n \in \mathbb{N}$ is a *dynamical system* on X which will be denoted by the sane symbol T.

A dynamical system $T\colon X \to X$ is called topologically transitive if for any pair U, V of nonempty open subsets of X there exists some integer $k \geq 0$ such that $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

It is well known that the weighted backward shift

$$B_\lambda\colon (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \lambda(x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

is a topologically transitive linear operator if $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ or if $X = c_0$.

Theorem 1. *Let $(\mathcal{Q}, +)$ be a metric semigroup, not necessary associative, with a the neutral element 0. We assume that the addition is continuous in $\mathcal{Q}$. Let T be a mapping from $\mathcal{Q}$ to itself. Suppose that there is a dense subsets $\Omega \subset \mathcal{Q}$ and $\Xi \in \mathcal{Q}$ and for every $u \in \Omega$ a number $m \in \mathbb{N}$ and a sequence of maps $S_{u,k}\colon \Xi \to \mathcal{Q}$, $k \in \mathbb{N}$ such that*

(i) $S_{u,k}(v) \to 0$ *for every* $v \in \Xi$ *as* $k \to \infty$*;*

(ii) *for each* $u \in \Omega$, $T^{k+m}[S_{u,k}(v) + u] \to v$ *for every* $u \in \Omega$ *as* $k \to \infty$.

Then T is topologically transitive.

In [1] were introduced normed rings and normed semirings of multisets using symmetric and supersymmetric polynomials on ℓ_1. In talk we consider how to use Theorem 1 to prove topological transitivity of some generalizations of the weighted backward shift for the (semi)rings of multisets.

This research was supported by the National Research Foundation of Ukraine, 2023.03/0198 “Analysis of the spectra of countably generated algebras of symmetric polynomials and possible applications in quantum mechanics and computer science”.

References

[1] Jawad, F.; Zagorodnyuk, A. Supersymmetric polynomials on the space of absolutely convergent series. *Symmetry* **2019**, *11*, 1111. https://doi.org/10.3390/sym11091111

e-mail: daryna.dolishniak@pnu.edu.ua, pavlo.dolishniak.22@pnu.edu.ua, andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua

Symmetric Analytic Functions Associated With an Infinite Tree

Nataliia Dubei, Andriy Zagorodnyuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Symmetric polynomials and analytic functions on a complex Banach space X with respect to a group (or semigroup) of isometric operators were studied by many authors. Such kinds of investigations can be considered as a continuation of the classical invariant theory to infinite-dimensional spaces using methods of functional analysis and topological algebras. Similarly as in classical invariant theory, for a given operator group $\mathcal{S}$ on X, the first important question is about a minimal set of generators of algebraic invariants of $\mathcal{S}$. In other words, it is important to describe a minimal set of $\mathcal{S}$-invariant polynomials generating the algebra of all (continuous) $\mathcal{S}$-invariant polynomials in the means of algebraic combinations. Also, it is interesting if we the system of generators can be chosen algebraically independent.

Let

$$\mathfrak{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \colon \alpha_i \in \{0, 1\}\}$$

The set $\mathfrak{A}$ is a commutative group with respect to coordinate-wise addition modulo 2. That is,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + (\beta_1, \beta_2, \ldots) = ((\alpha_1 + \beta_1) \bmod 2, (\alpha_2 + \beta_2) \bmod 2, \ldots).$$

We denote by $\mathfrak{A}_0$ the subgroup of $\mathfrak{A}$ consisting of elements $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ such that only a finite number of α_i is not equal to zero.

Let $X(\mathfrak{A})$ be a linear space of complex-valued functions on $\mathfrak{A}$. Denote by $\mathcal{A}$ the group of operators T_β, $\beta \in \mathfrak{A}$ such that

$$T_\beta(x(\alpha)) = x(\alpha + \beta), \quad x(\alpha) \in X(\mathfrak{A}),$$

and by $\mathcal{A}_0$ its subgroup for $\beta \in \mathfrak{A}_0$.

Let $1 \le p < \infty$ and $L_p(\mathfrak{A})$ be a space of all complex-valued Lebesgue integrable in a power p functions $x(t) : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ with the norm

$$\|x\| = \left(\int_{\mathfrak{A}^2} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Let us define the following representation of group $\mathcal{A}$ on $L_p(\mathfrak{A})$. The set of indexes $\mathfrak{A}$ can be naturally identified with the interval $[0, 1]$ by associating each binary sequence α with its binary decimal representation in $[0, 1]$. For each positive integer n, divide the interval $[0, 1]$ into 2^n equal semi-open interval of the form $I_i^n = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ for $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. The group $\mathcal{A}$ of operators T_β, $\beta \in \mathfrak{A}$, acts by permuting intervals I_i^n according to the following rule: each interval I_i^n is associated with its index i, represented as a sequence of n 0s and 1s. The operator T_β permutes I_i^n to the interval I_j^n, where j is the representation of the result of coordinate-wise addition modulo 2 between the binary representations of i and β.

It is well-known [1, 2] that polynomials

$$R_k(x) = \int_{[0,1]} \big(x(t)\big)^k dt, \quad k \le \lfloor p \rfloor$$

form an algebraic basis in the algebra of all symmetric polynomials on $\mathcal{P}_s(L_p[0, 1])$. Let as define polynomials

$$R_k^{0,m}(x) = (R_k(x))^m,$$

$$R_k^{1,m}(x) = \left(\int_{[0,\frac{1}{2})} \big(x(t)\big)^k dt \right)^m + \left(\int_{[\frac{1}{2},1)} \big(x(t)\big)^k dt \right)^m,$$

$$\ldots$$

$$R_k^{n,m}(x) = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\int_{\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)} \big(x(t)\big)^k dt \right)^m$$

where $m = 1, 2, \ldots$ represents the power to which the polynomial is raised and $n = 0, 1, \ldots$ indicates the level of subdivision. For $m \geq 2$ polynomials $R_k^{n,m}$ are $\mathcal{A}$-symmetric but not symmetric on $L_p(\mathfrak{A})$.

In the talk, we will introduce another symmetry group, $\mathfrak{B}$, and consider the space $\ell_p(\mathfrak{B})$. We will then construct polynomials $F_k^{n,m}(x)$ for this space and analyze the algebraic dependencies within this family of polynomials.

References

[1] González, M.; Gonzalo, R.; Jaramillo, J.A. Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces. *J. Lond. Math. Soc.* **1999**, *59*, 681–697. https://doi.org/10.1112/S0024610799007164.

[2] Galindo, P.; Vasylyshyn, T.; Zagorodnyuk, A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞. *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A Math.* **2017**, *147*, 743–761. https://doi.org/10.1017/S0308210516000287.

On uniqueness of Sylvester-type matrix polynomial equation's solution

Nataliia Dzhaliuk, Vasyl' Petrychkovych

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, L'viv, Ukraine

Many problems of the dynamical systems theory [1] and the control theory [2] include the finding of solutions for the Sylvester-type matrix polynomial equation

$$A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda). \qquad (1)$$

The solvability conditions of this kind of matrix equations, methods for the construction of solutions, and the description of their structure are presented in [3, 4].

From the results of papers [5, 6], the conditions for the uniqueness of bounded degrees solutions follow: the Sylvester-type matrix polynomial equation (1), where $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ are regular polynomial matrices and $\deg C(\lambda) \le \deg A(\lambda)+\deg B(\lambda)-2$, has a unique solution $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ such that

$$\deg X(\lambda)<\deg B(\lambda), \quad \deg Y(\lambda)<\deg A(\lambda)$$

if and only if $(\det A(\lambda), \det B(\lambda))=1$.

In [7], we establish the necessary and sufficient conditions for the existence, and in this abstract, the conditions for the uniqueness of the solution $X(\lambda), Y(\lambda)$ with a fixed degree for the Sylvester-type matrix polynomial equation (1).

Let $A(\lambda)\in M(n,m,\mathcal{F}[\lambda])$, $B(\lambda)\in M(p,q,\mathcal{F}[\lambda])$, and $C(\lambda)\in M(n,q,\mathcal{F}[\lambda])$ be known polynomial matrices from the Sylvester-type matrix polynomial equation (1) over a ring of polynomials $\mathcal{F}[\lambda]$, $\mathcal{F}$ is a field. Write them in the form of matrix polynomials:

$$A(\lambda)=A_r\lambda^r+\ldots+A_1\lambda+A_0,\ \deg A(\lambda)=r,\ A_i\in M(n,m,\mathcal{F}), i=0,1,\ldots,r,$$

$$B(\lambda)=B_s\lambda^s+\ldots+B_1\lambda+B_0,\ \deg B(\lambda)=s, B_j\in M(p,q,\mathcal{F}), j=0,1,\ldots,s,$$

$$C(\lambda)=C_t\lambda^t+\ldots+C_1\lambda+C_0,\ \deg C(\lambda)=t, C_f\in M(n,q,\mathcal{F}), f=0,1,\ldots,t.$$

Matrices $X(\lambda)\in M(m,q,\mathcal{F}[\lambda])$, $Y(\lambda)\in M(n,p,\mathcal{F}[\lambda])$ are unknown polynomial matrices and write them in the form of matrix polynomials:

$$X(\lambda)=X_k\lambda^k+\ldots+X_1\lambda+X_0,\ \deg X(\lambda)=k,$$

$$Y(\lambda)=Y_l\lambda^l+\ldots+Y_1\lambda+Y_0,\ \deg Y(\lambda)=l.$$

Theorem. *Let in the Sylvester-type matrix polynomial equation* (1)

$$\deg A(\lambda)+\deg X(\lambda)=\deg B(\lambda)+\deg Y(\lambda)=\deg C(\lambda),$$

i.e., $r+k=s+l=t$. Then the matrix equation (1) *has a unique solution $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ of degrees k, l, respectively, if and only if*

$$\operatorname{rank}\mathbf{G}=\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G} & \mathbf{c}\end{matrix}\right\|=(k+1)mq+(l+1)np$$

where the matrix

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}
\overline{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \overline{B}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0}\\
\overline{A}_{r-1} & \overline{A}_r & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{B}_{s-1} & \overline{B}_s & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\overline{A}_0 & \overline{A}_1 & \overline{A}_2 & \ldots & \overline{A}_k & \overline{B}_0 & \overline{B}_1 & \overline{B}_2 & \ldots & \overline{B}_l\\
\mathbf{0} & \overline{A}_0 & \overline{A}_1 & \ldots & \overline{A}_{k-1} & \mathbf{0} & \overline{B}_0 & \overline{B}_1 & \ldots & \overline{B}_{l-1}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{A}_0 & \ldots & \overline{A}_{k-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{B}_0 & \ldots & \overline{B}_{l-2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \overline{A}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \overline{B}_0
\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_i = A_i \otimes I_q, \ \overline{B}_j = I_n \otimes B_j^{\mathsf{T}},$$

$i = 0, 1, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, s$, and

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_t & \ldots & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},$$

$\mathbf{c}_f = \begin{bmatrix} row_1(C_f) & row_2(C_f) & \ldots & row_n(C_f) \end{bmatrix}$, $row_j(C_f)$ is the $j-th$ row of matrix C_f, $f = 0, 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, n$, I_n is the $n \times n$ identity matrix, the symbol $\otimes$ denotes the Kronecker product, T denotes the transposition.

References:

1. Kaczorek T. Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
2. Barnett S. Matrices in control theory with applications to linear programming. – London: Van Nostrand Reingold Company, 1971. – 221 p.
3. Dzhaliuk, N.S., Petrychkovych V.M. Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure. Algebra Discrete Math., 2019, **27** (2), 243–251.
4. Dzhaliuk, N.S., Petrychkovych V.M. Matrix linear bilateral equations over different domains, methods for the construction of solutions, and description of their structure. Journal of Mathematical Sciences, 2024, **282** (5), 616–645.
5. Barnett S. Regular polynomial matrices having relatively prime determinants, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, **65** (3), 585–590.
6. Feinstein J., Bar-Ness Y. On the uniqueness of the minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$, J. Franklin Inst., 1980, **310** (2), 131–134.
7. Dzhaliuk, N.S., Petrychkovych V.M. Kronecker product of matrices and solutions of Sylvester-type matrix polynomial equations. Matematychni Studii, 2024, **61** (2), 115–122.

e-mail: nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

On a Special Analytic Mapping of Unbounded Type on ℓ_1.

Dmytro Faryma, Oleh Holubchak, Andriy Zagorodnyuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
Lviv National Agrarian University, Ukraine

Let us consider the following mapping on the space of absolutely summing sequences ℓ_1:

$$\mathcal{I}\colon \ell_1 \ni x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (I_1(x), \ldots, I_n(x), \ldots) \in \ell_1,$$

where $I_k(x) = x_k^k$.

Proposition 3. *The mapping $\mathcal{I}$ has the following properties.*

1. *$\mathcal{I}$ is entire analytic mapping, not surjective.*
2. *$\mathcal{I}$ is of unbounded type.*
3. *$\mathcal{I}$ can be extended to a mapping $\mathcal{I}^0\colon c_0 \to \ell_1$. The radius of boundedness $\varrho_a(\mathcal{I}^0)$ of $\mathcal{I}^0$ is equal to 1 at any point a in c_0.*
4. *$\mathcal{I}$ can be extended to an ℓ_1-valued mapping $\mathcal{I}^\infty$ from the union of all open unit balls of ℓ_∞ centered at points of c_0.*

Note that $\mathcal{I}^\infty$ is not defined on the unit sphere of ℓ_∞. Indeed, If $z = (1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$, then $\mathcal{I}^\infty(z) = \infty$. However, it can defined at some points of the unit sphere of ℓ_∞.

Example 1. *Let*

$$z_n = \begin{cases} \frac{m-1}{m} & \text{if } n = m^2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \ell_\infty$, $\|z\| = 1$ and

$$\|\mathcal{I}^\infty(z)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{m^2}. \tag{1}$$

Since

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m^2}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{m} = \frac{1}{e} < 1,$$

then, by the root test the series (1) converges and so $\mathcal{I}^\infty(z)$ is well-defined, and belongs to ℓ_1.

We denote by $S(\mathcal{I})$ the set of $z \in \ell_\infty$ such that $\mathcal{I}^\infty(z)$ is well-defined.

Proposition 4. *The mapping $\mathcal{I}^\infty\colon S(\mathcal{I}) \to \ell_1$ is a surjection. Every element $z \in S(\mathcal{I})$ can be represented as $z = z' + z''$, where $z' \in c_0$ and $\|z''\|_{\ell_\infty} = 1$.*

Let as define the following composition operator

$$C_{\mathcal{I}}\colon H(\ell_1) \longrightarrow H_{\mathbf{I}}(\ell_1),$$

$$C_{\mathcal{I}}\colon f \longmapsto f \circ \mathcal{I}.$$

Theorem 2.

1. *$C_{\mathcal{I}}$ is injective but not surjective. In particular, $H_{b\mathbf{I}}(\ell_1)$ does not belong to the range of $C_{\mathcal{I}}$.*
2. *If $\varrho_a(f) \geq 1$ for some $f \in H(\ell_1)$ and $a \in \ell_1$, then $\varrho_a(C_{\mathcal{I}}(f)) \geq 1$.*
3. *For every $f \in H(\ell_1)$, $C_{\mathcal{I}}(f)$ can be extended to c_0 and this extension is equal to $C_{\mathcal{I}^0}(f) = f \circ \mathcal{I}^0$.*
4. *If $\varrho_a(f) \geq 1$ for every $a \in \ell_1$, then $\varrho_d(C_{\mathcal{I}^0}(f)) \geq 1$ for every $d \in c_0$, and $C_{\mathcal{I}^0}(f)$ can be extended to the union of open unit balls in ℓ_∞ centered at points of c_0.*

e-mail: dark903317@gmail.com , andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua, oleggol@ukr.net

On the construction of the common invariant solutions for some $P(1,4)$-invariant partial differential equations

Vasyl Fedorchuk, Volodymyr Fedorchuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, L'viv, Ukraine

We consider the following $(1+3)$-dimensional $P(1,4)$-invariant partial differential equations (PDEs): the Eikonal equation, the Euler-Lagrange-Born-Infeld equation, the homogeneous Monge-Ampère equation, the inhomogeneous Monge-Ampère equation. At the present time, we have constructed the majority common invariant solutions for those equations. For this aim, we have used the results concerning construction and classification of invariant solutions for the $(1+3)$-dimensional $P(1,4)$-invariant Eikonal equation, since this equation is the simplest among the equations under investigation.

In our talk, we plan to present some of the results obtained.

References

[1] *Lie S.* Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, *Leipz. Berichte*, I. 53. (Reprinted in Lie, S., *Gesammelte Abhandlungen*, **4**, Paper IX.), 1895.

[2] *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

[3] *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986.

[4] *Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I.* Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluver Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[5] *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* On classification of the low-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group $P(1,4)$, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2006, **3**, N 2, 302–308.

[6] *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation, *Symmetry* 2016, 8(6), 51; https://doi.org/10.3390/sym8060051.

[7] *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2018. 176 pp.

[8] *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* On the Construction and Classification of the Common Invariant Solutions for Some $P(1,4)$ - Invariant Partial Differential Equations. *Applied Mathematics*, 2023, **14**, N 11, 728-747. DOI:10.4236/am.2023.1411044

e-mail: vasfed@gmail.com, volfed@gmail.com

Some Toeplitz–Hessenberg Determinants with Schröder Number Entries

Taras Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

In this note, we present determinant formulas of several Hessenberg matrices whose nonzero entries are derived from the small and large Schröder numbers. Our research is similar to that presented in [1, 2, 3].

Let S_n denote the n-th large Schröder number given by

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n}{k}\binom{n}{k-1}, \quad n \geq 1,$$

with $S_0 = 1$. The small Schöder number s_n is defined as $s_n = \frac{1}{2}S_n$ for $n \geq 1$, with $s_0 = 1$. The sequences $\{s_n\}_{n\geq 0}$ and $\{S_n\}_{n\geq 0}$ are both indexed in the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [5] as A001003 and A006318, respectively.

The Toeplitz–Hessenberg matrix is an $n \times n$ matrix of the form

$$H_n(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

The following result is known as Trudi's formula [4]:

$$\det(H_n) = (-a_0)^n \sum_{\tau_n = n} m_n(t) \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^{t_1} \left(-\frac{a_2}{a_0}\right)^{t_2} \cdots \left(-\frac{a_n}{a_0}\right)^{t_n}, \tag{2}$$

where $\tau_n = t_1 + 2t_2 + \cdots + nt_n$ and $m_n(t) = \binom{|t|}{t_1,\ldots,t_n}$ is the multinomial coefficient.

We will consider the matrix (2) with $a_0 = \pm 2$. For brevity, we denote $D_{\pm}(a_1, \ldots, a_n)$ as $\det\big(H_n(\pm 2; a_1, a_2, \ldots, a_n)\big)$.

Theorem 1. *For $n \geq 2$,*

$$D_-(s_0, \ldots, s_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k-1}k}{2^{k-n}} \binom{n}{k+j}\binom{n-1+j}{j} - 1,$$

$$D_+(s_1, \ldots, s_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} k2^{n-k} \binom{n}{k+j}\binom{n-1+j}{j} - 1.$$

Theorem 2. *For $n \geq 2$,*

$$D_+(S_0, \ldots, S_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{k}{(-2)^{k-n}} \binom{n}{k+j}\binom{n-1+j}{j} + (-1)^n,$$

$$D_-(S_0, \ldots, S_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} k2^{n-k} \binom{n}{k+j}\binom{n-1+j}{j} + (-1)^n,$$

$$D_+(S_1, \ldots, S_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} 2^{n+k} \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}.$$

Utilizing (2) yields the multinomial identities for the two kinds of Shröeder numbers. We will give only two formulas.

Corollary 3. *The following formulas hold for $n \geq 2$:*

$$\sum_{\tau_n=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|t|} m_n(t) s_1^{t_1} s_2^{t_2} \cdots s_n^{t_n}$$
$$= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{k}{2^k} \binom{n}{k+j} \binom{n-1+j}{j} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{\tau_n=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|t|} m_n(t) S_1^{t_1} S_2^{t_2} \cdots S_n^{t_n}$$
$$= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k},$$

where $m_n(t)$ is the multinomial coefficient, $\tau_n = t_1 + 2t_2 + \cdots + nt_n$, $|t| = t_1 + \cdots + t_n$, and the summation is over nonnegative integers t_j satisfying the Diophantine equation $\tau_n = n$.

References

[1] T. Goy, M. Shattuck, Determinant formulas of some Toeplitz–Hessenberg matrices with Catalan entries, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **129** (2019), 46.

[2] T. Goy, M. Shattuck, Hessenberg–Toeplitz matrix determinants with Schröder and Fine number entries, *Carpathian Math. Publ.* **15**(2) (2023), 420-436.

[3] T. Goy, M. Shattuck, Determinant identities for the Catalan, Motzkin and Schröder numbers, *Art Discrete Appl. Math.* **7**(1) (2024), #P1.09.

[4] T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development.* Vol. 3, Dover Publications, New York, 1960.

[5] N. J. A. Sloane (ed.), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at `https://oeis.org`.

e-mail: taras.goy@pnu.edu.ua

Nonlinear Partial Differential Equations in Module of Copolynomials over a Commutative Ring

Serhii Gefter, Oleksii Piven'

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

Let K be an arbitrary commutative integral domain with identity of characteristic 0 and let $K[x_1,...,x_n]$ be a ring of polynomials with coefficients in K.

Definition 1. By a copolynomial over the ring K we mean a K-linear functional defined on the ring $K[x_1,...,x_n]$, i.e. a homomorphism from the module $K[x_1,...,x_n]$ into the ring K.

We denote the module of copolynomials over K by $K[x_1,..,x_n]'$. If $T \in K[x_1,..,x_n]'$ and $p \in K[x_1,...,x_n]$, the for the value of T on p we use the notation (T,p). We also write the copolynomial $T \in K[x_1,...,x_n]'$ in the form $T(x)$, where $x = (x_1,...,x_n)$ is regarded as the argument of polynomials $p(x) \in K[x_1,...,x_n]$ subjected to the action of the K-linear mapping T.

Definition 2. For any multi-index $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ the derivative $D^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|}T}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ ($|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j$) of a copolynomial T is defined in the same way as in the classical theory of generalized functions: $(D^\alpha T,p) = (-1)^{|\alpha|}(T,D^\alpha p), \quad p \in K[x_1,...,x_n]$.

Example 1. The copolynomial δ-function is given by the formula $(\delta,p) = p(0), \quad p \in K[x_1,...,x_n]$.

Definition 3. Let $T \in K[x_1,...,x_n]'$ and $s = (s_1,...,s_n)$. Consider the following formal Laurent series from the ring $\frac{1}{s_1 s_2\cdots s_n}K[[\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},...,\frac{1}{s_n}]]$:

$$C(T)(s) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{(T,x^\alpha)}{s^{\alpha+\iota}},$$

where $\iota = (1,...,1) \in \mathbb{N}_0^n$. The Laurent series $C(T)(s)$ will be called the *Cauchy-Stieltjes transform* of a copolynomial T.

Let $\mathcal{F} = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$ be a linear differential operator of infinite order with coefficients $a_\alpha \in K$. Obviously the operator $\mathcal{F}$ is well defined on $K[x_1,...,x_n]'$ and on the K-module of formal Laurent series $\frac{1}{s_1 s_2\cdots s_n}K[[\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},...,\frac{1}{s_n}]]$.

Proposition 5. *For any $T \in K[x_1,...,x_n]'$ the equality $C(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(C(T))$ holds.*

The Cauchy-Stieltjes transform and Proposition 5 allow to introduce the multiplication operation on the module of copolynomials such that this operation is consistent with the differentiation.

Definition 4. Let $T_1,T_2 \in K[x_1,...,x_n]'$, i.e. T_1,T_2 are copolynomials. Define their *product* by the following equality: $C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2)$, i.e. $T_1T_2 = C^{-1}\left(C(T_1)C(T_2)\right)$, where $C : K[x_1,...,x_n]' \to \frac{1}{s_1 s_2\cdots s_n}K[[\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},...,\frac{1}{s_n}]]$ is a Cauchy-Stieltjes transform.

Example 2. Let $n=1$. We find the square of δ-function:

$$C(\delta^2)(s) = (C(\delta))^2(s) = \frac{1}{s^2} = \left(\frac{-1}{s}\right)' = (-C(\delta))' = C(-\delta'),$$

i.e.

$$\delta^2 = -\delta'.$$

The ring of formal power series of the form $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)t^k$ with coefficients $u_k(x) \in K[x_1,...,x_n]'$ will be denoted by $K[x_1,...,x_n]'[[t]]$.

The partial derivative with respect to t of the series $u(t,x) \in K[x_1,....,x_n]'[[t]]$ is defined by the formula $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ku_k(x)t^{k-1}$. The partial derivatives D^α with respect to variables $x_1,...,x_n$ of the series $u(t,x) \in K[x_1,...,x_n]'[[t]]$ is defined as follows: $D^\alpha u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (D^\alpha u_k)(x)t^k$.

Let $P \in K[z_1,...,z_m]$, $P(0) = 0$ and let $\mathcal{F}_j = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{j,\alpha}D^\alpha$ $(j = 1,...,m)$ be linear differential operators of infinite order with coefficients $a_{j,\alpha} \in K$ which act on the module of copolynomials $K[x_1,...,x_n]'$. Consider the following nonlinear differential equation in the ring $K[x_1,...,x_n]'[[t]]$:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = P\left((\mathcal{F}_1 u)(t,x),....,(\mathcal{F}_m u)(t,x)\right), \tag{1}$$

$$u(0,x) = Q(x) \in K[x_1,...,x_n]'. \tag{2}$$

We formulate the existence and uniqueness theorem for the Cauchy problem (1), (2).

Theorem 3. *Let K contains the field of rational numbers. Then for any copolynomial $Q \in K[x_1,...,x_n]'$ the Cauchy problem* (1), (2) *has a unique solution.*

Example 4. Let $a, b, u_0 \in K$ and let $n = 1$. In this example we do not assume that $K \supset \mathbb{Q}$. Consider in the ring $K[x]'[[t]]$ the Cauchy problem for the Burgers equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(0,x) = u_0\delta(x).$$

This Cauchy problem has a unique solution and this solution is of the form

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\delta^{2k+1}t^k,$$

where

$$u_{k+1} = a(4k+2)u_k - b\sum_{j=0}^{k} u_j u_{k-j} \in K, \quad k = 0,1,2,...$$

This work was supported by the Akhiezer Foundation.

1. Gefter, S.L., Piven', A.L. Linear Partial Differential Equations in Module of Copolynomials of Several Variables over a Commutative Ring. http://arxiv.org/abs/2407.04122, to appear in *J. Math. Physics, Analysis, Geometry.*

2. Gefter, S.L., Piven', A.L. Linear Partial Differential Equations in Module of Formal Generalized Functions over Commutative Ring. *J. Math. Sci.* (2021), **257** (5), 579–596.

e-mail: gefter@karazin.ua, aleksei.piven@karazin.ua

On locally compact shift-continuous topologies on upper and down subsemigroups of the bicyclic monoid with adjoined zero

Oleg Gutik
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine

We follow the semigroup terminology of [4, 5, 6, 16]. Throughout these abstract we always assume that all topological spaces involved are Hausdorff — unless explicitly stated otherwise.

Let S be a non-void topological space which is provided with an associative multiplication (a semigroup operation) $\mu\colon S\times S\to S$, $(x,y)\mapsto\mu(x,y)=xy$. Then the pair (S,μ) is called

(i) a *right* (*left*) *topological semigroup* if all interior left shifts $\lambda_s\colon S\to S$, $x\mapsto sx$ (right shifts $\rho_s\colon S\to S$, $x\mapsto xs$), are continuous maps, $s\in S$;

(ii) a *semitopological semigroup* if the map μ is separately continuous;

(iii) a *topological semigroup* if the map μ is jointly continuous.

We usually omit the reference to μ and write simply S instead of (S,μ). It goes without saying that every topological semigroup is also semitopological and every semitopological semigroup is both a right and left topological semigroup.

A topology τ on a semigroup S is called:

- a *semigroup* topology if (S,τ) is a topological semigroup;
- a *shift-continuous* topology if (S,τ) is a semitopological semigroup;
- an *left-continuous* topology if (S,τ) is a left topological semigroup;
- an *right-continuous* topology if (S,τ) is a right topological semigroup.

The bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subjected only to the condition $pq=1$. The semigroup operation on $\mathscr{C}(p,q)$ is determined as follows:

$$q^kp^l\cdot q^mp^n=\begin{cases} q^{k-l+m}p^n, & \text{if } l<m;\\ q^kp^n, & \text{if } l=m;\\ q^kp^{l-m+n}, & \text{if } l>m.\end{cases}$$

In [13] Makanjuola and Umar study algebraic property of the following anti-isomorphic subsemigroups

$$\mathscr{C}_+(p,q)=\left\{q^ip^j\in\mathscr{C}(p,q)\colon i\leqslant j\right\}\quad\text{and}\quad\mathscr{C}_-(p,q)=\left\{q^ip^j\in\mathscr{C}(p,q)\colon i\geqslant j\right\},$$

of the bicyclic monoid. In the paper [8] we prove that every Hausdorff left-continuous (right-continuous) topology on the monoid $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$) is discrete and show that there exists a compact Hausdorff topological monoid S which contains $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$) as a submonoid. Also, in [8] we constructed a non-discrete right-continuous (left-continuous) topology τ_p^+ (τ_p^-) on the semigroup $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$) which is not left-continuous (right-continuous).

In [6] it is proved that every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the bicyclic monoid with adjoined zero is either compact, or discrete. The problem of adjoining of zero to a semitopological semigroup in locally compact case is studied for different semitopological semigroups in [1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 9, 10].

Later by $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ and $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ we denote the semigroups $\mathscr{C}_+(a,b)$ and $\mathscr{C}_-(a,b)$ with the adjoined zero.

Theorem 1. *On the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ ($\mathscr{C}_-(p,q)^0$) there exist continuum many Hausdorff locally compact shift-continuous topologies up to topological isomorphism.*

Corollary 3. *On the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ ($\mathscr{C}_-(p,q)^0$) there exist exactly three Hausdorff locally compact shift-continuous topologies up to homeomorphism.*

References

[1] S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **13** (2016), 21–28.

[2] S. Bardyla, *On locally compact semitopological graph inverse semigroups*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 19–28.

[3] S. Bardyla, *On topological McAlister semigroups*, J. Pure Appl. Algebra **227** (2023), no. 4, 107274.

[4] J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.

[5] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.

[6] R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

[7] O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Visnyk L'viv Univ., Ser. Mech.-Math. **80** (2015), 33–41.

[8] O. Gutik, *On non-topologizable semigroups*, Preprint (arXiv:2405.16992).

[9] O. V. Gutik, M. B. Khylynskyi, *On locally compact shift continuous topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{[0,\infty)}$ with an adjoined compact ideal*, Mat. Stud. **61** (2024), no. 1, 10–20.

[10] O. Gutik and P. Khylynskyi, *On a locally compact submonoid of the monoid cofinite partial isometries of $\mathbb{N}$ with adjoined zero,* Topol. Algebra Appl. **10** (2022), no. 1, 233–245.

[11] O. V. Gutik and K. M. Maksymyk, *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero*, J. Math. Sci. **265** (2022), no. 3, 369–381.

[12] O. Gutik, and M. Mykhalenych, *On a semitopological semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ when a family $\mathscr{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω*, Mat. Stud. **59** (2023), no. 1, 20–28.

[13] S. O. Makanjuola and A. Umar, *On a certain sub semigroup of the bicyclic semigroup*, Communications in Algebra, **25** (1997), no. 2, 509–519.

[14] K. Maksymyk, *On locally compact groups with zero*, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Mat. **88** (2019), 51–58. (in Ukrainian).

[15] T. Mokrytskyi, *On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero*, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Mat. **87** (2019), 37–45.

[16] W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984.

e-mail: oleg.gutik@lnu.edu.ua

THE WARING-GIRARD FORMULA FOR SYMMETRIC POLYNOMIALS ON THE SPACE ℓ_p

Olha Handera-Kalynovska, Viktoriia Kravtsiv

Vasyl Stefanyk Precarpathian Nathional University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let X be a complex Banach spaces with a symmetric basis (e_n). Let us recall that a Schauder basis (e_n) is *symmetric* if for every permutation (one-to-one map) $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, the basis $(e_{\sigma(n)})$ is equivalent to (e_n), where $S_{\mathbb{N}}$ is the semigroup of all permutations on the set of all natural numbers $\mathbb{N}$. So, we can uniquely represent every $x \in X$ as

$$x = (x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

A mapping F on X is said to be *symmetric* if

$$F(x_1, x_2, \ldots) = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots)$$

for each $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. A function $P\colon X \to \mathbb{C}$ is a polynomial of degree m if the restriction of P to any finite-dimensional subspace of X is a polynomial of several variables of degree $\leq m$ and there is a finite-dimensional subspace V of X such that the restriction of P to V is a polynomial of degree m. We denote by $\mathcal{P}_s(X)$ the algebra of all continuous symmetric polynomials on X.

In the case $X = \ell_1$, polynomials

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

form an algebraic basis of $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. That is, for any polynomials $P \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$ there is a unique polynomial of several complex variables $Q(t_1, \ldots, t_m)$ such that $P(x) = Q(F_1(x), \ldots, F_m(x))$. Polynomials F_k are called *power* symmetric polynomials. The algebraic basis is not unique, of course, and we will use also bases

$$G_n(x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \tag{1}$$

which is called the *basis of elementary symmetric polynomials* and

$$H_n(x) = \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \tag{2}$$

which is called the *basis of homogeneous symmetric polynomials*.

We denote by $\mathbb{Z}_+$ the set of all nonnegative integers. It is well-known that the elementary and homogeneous symmetric polynomials can be expressed in terms of the power symmetric polynomials by Waring-Girard formulas:

$$G_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{(-1)^{n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} (F_1)^{\lambda_1} (F_2)^{\lambda_2} \ldots (F_n)^{\lambda_n} \tag{3}$$

and

$$H_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{1}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} (F_1)^{\lambda_1} (F_2)^{\lambda_2} \ldots (F_n)^{\lambda_n}, \tag{4}$$

where $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+, j = \overline{1, n}$.

In the case $p > 1$ we have no elementary and homogeneous symmetric polynomials. In this talk we will introduce Waring-Girard formulas in the case of space $\ell_p, p > 1$ and find the clear form of the elementary and homogeneous symmetric polynomials in this case.

This research was funded by the project of Ministry of Education and Science of Ukraine (0123U101791).

e-mail: olha.handera-kalynovska@pnu.edu.ua, viktoriia.kravtsiv@pnu.edu.ua

Rationally factorized Lax type flows in the space dual to the centrally extended Lie algebra of matrix super-integro-differential operators and their Hamiltonian structure

Oksana Hentosh

Pidsryhach IAPMM, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

Let us consider the Lie algebra g which consists of matrix super-integro-differential operators with one anticommuting variable such as $\mathcal{A} := \mathbf{1}\partial^q + \sum_{p<2q} A_p D_\theta^p$, where $A_r \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1; gl(m|n))$, $gl(m|n))$ is a semi-simple Lie superalgebra of square supermatrices, the supermatrices A_p are even for every even p and odd for every odd p, $\mathbf{1} \in gl(m+n)$ is an unit matrix, $A_p = A_p(x,\theta) := A_p^0(x) + \theta A_p^1(x)$, $p \in \mathbb{Z}$, $p < 2q$, $q \in \mathbb{N}$, $\partial = \partial/\partial x$, $x \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta \in \Lambda_1$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ is a commutative Banach superalgebra over the field $\mathbb{C} \subset \Lambda_0$, $D_\theta := \partial/\partial\theta + \theta\partial/\partial x$ is a superderivative, $D_\theta^2 = \partial/\partial x$, and $\partial/\partial\theta$ is a left partial derivative by the anticommuting variable θ, with the standard commutator $[.,.]$, acting by the rule $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ for any $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ g, where symbol "$\circ$" denotes the product of operators. The scalar product $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_{x\in\mathbb{S}} dx \int d\theta$ $\operatorname{sSp} \operatorname{res}_{D_\theta}(\mathcal{A}\mathcal{B})$, where "$\operatorname{res}_{D_\theta}$" denotes the coefficient at D_θ^{-1} in the expansion of a matrix super-integro-differential operator and "sSp" is a supermatrix supertrace, being invariant with respect to the mentioned above commutator $[.,.]$, allows us to identify the dual space g^* to g with the Lie algebra itself. The latter is splitting into the direct sum $\mathrm{g} := \mathrm{g}_+ \oplus \mathrm{g}_-$ of two its Lie subalgebras, where g_+ is a Lie subalgebra of formal polynomials by the superderivative operator with supermatrix-valued coefficients, and $\mathrm{g}_+^* \simeq \mathrm{g}_-$, $\mathrm{g}_-^* \simeq \mathrm{g}_+$.

One constructs the central extension $\hat{\mathrm{g}} := \tilde{\mathrm{g}} \oplus \mathbb{C}$ of parameterized Lie algebra $\tilde{\mathrm{g}} := \prod_{y\in\mathbb{S}} \mathrm{g}$ by the Maurer-Cartan 2-cocycle on $\tilde{\mathrm{g}}$ such as $\omega_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \int_{y\in\mathbb{S}} dy\, (\mathcal{A}, \partial\mathcal{B}/\partial y)$, where $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \tilde{\mathrm{g}}$, with the commutator $[(\mathcal{A},d), (\mathcal{B},e)] = ([\mathcal{A},\mathcal{B}], \omega_2(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ for any $(\mathcal{A},d), (\mathcal{B},e) \in \hat{\mathrm{g}}$, and introduces another commutator on $\hat{\mathrm{g}}$ in the form

$$[(\mathcal{A},d), (\mathcal{B},e)]_{\mathcal{R}} = ([\mathcal{A},\mathcal{B}]_{\mathcal{R}}, \omega_{2,\mathcal{R}}(\mathcal{A},\mathcal{B})), \tag{1}$$

where $[\mathcal{A},\mathcal{B}]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}\mathcal{A},\mathcal{B}] + [\mathcal{A},\mathcal{R}\mathcal{B}]$, $\omega_{2,\mathcal{R}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \omega_2(\mathcal{R}\mathcal{A},\mathcal{B}) + \omega_2(\mathcal{A},\mathcal{R}\mathcal{B})$, $\mathcal{R} = (P_+ - P_-)/2$ and $P_\pm$ are projectors on the Lie subalgebras $\tilde{\mathrm{g}}_\pm$. On the space $\hat{\mathrm{g}}^*$, dual to $\hat{\mathrm{g}}$ with respect to the scalar product $((\mathcal{A},d), (\mathcal{B},e)) = \int_{y\in\mathbb{S}} dy\, (\mathcal{A},\mathcal{B}) + de$, the commutator (1) determines the Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma,\mu\}_{\mathcal{R}}(l) = \int_{y\in\mathbb{S}} dy\, (l, [\nabla_l\gamma(l), \nabla_r\mu(l)]_{\mathcal{R}}) + c\omega_{2,\mathcal{R}}(\nabla_l\gamma(l), \nabla_r\mu(l)) = (\nabla_l\gamma(l), \Theta\nabla_r\mu(l)), \tag{2}$$

where $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{g}}^*)$ are smooth by Frechet functionals on $\tilde{\mathrm{g}}^* \simeq \tilde{\mathrm{g}}$, at a point $(l,c) \in \hat{\mathrm{g}}^*$. Here $l \in \tilde{\mathrm{g}}^*$ is some matrix super-integro-differential operator of order $q \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, ∇_l, ∇_r are left and right gradient operators accordingly, $\Theta : T^*(\tilde{\mathrm{g}}^*) \to T(\tilde{\mathrm{g}}^*)$ is the Poisson operator generating the Lie-Poisson bracket (2) at a point $l \in \tilde{\mathrm{g}}^*$ and acting as $\Theta : \nabla\gamma(l) \mapsto -[l - c\mathbf{1}\partial/\partial y, (\nabla\gamma(l))_-] + [l - c\mathbf{1}\partial/\partial y, \nabla\gamma(l)]_-$ for any $\gamma \in \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{g}}^*)$, the subscript "$-$" denotes the projection of the corresponding element from $\tilde{\mathrm{g}}$ on the Lie subalgebra $\tilde{\mathrm{g}}_- := \prod_{y\in\mathbb{S}} \mathrm{g}_-$, and $T(\tilde{\mathrm{g}}^*), T^*(\tilde{\mathrm{g}}^*)$ are tangent and cotangent spaces to $\tilde{\mathrm{g}}^*$.

The $\mathcal{R}$-deformed Lie-Poisson bracket (2) and the Casimir functionals $\gamma_j \in \mathcal{I}(\hat{\mathrm{g}}^*)$, $j \in \mathbb{N}$, of the central extension $\hat{\mathrm{g}}$, whose left gradients obey the equalities $[l - c\mathbf{1}\partial/\partial y, \nabla_l\gamma_j(l)] = 0$, where $\nabla_l\gamma_j(l) := \mathbf{1}\partial^j + \sum_{p<2j} A_{j,p} D_\theta^p$, $A_{j,p}$ are supermatrix-valued functions of suitable parity, $j \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p < 2j$, at a point $(l,c) \in \hat{\mathrm{g}}^*$, give us the hierarchy of Lax type Hamiltonian flows on $\tilde{\mathrm{g}}^* \simeq \tilde{\mathrm{g}}$:

$$dl/dt_j = [(\nabla_l\gamma_j(l)))_+, l - c\mathbf{1}\partial/\partial y], \quad j \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

where the subscript "$+$" denotes the projection of the corresponding element from $\tilde{\mathrm{g}}$ on the Lie subalgebra $\tilde{\mathrm{g}}_+ := \prod_{y\in\mathbb{S}} \mathrm{g}_+$. One considers another hierarchy of Lax type Hamiltonian flows

$$d\tilde{l}/dt_j = [(\nabla_l\gamma_j(\tilde{l}))_+, \tilde{l} - c\mathbf{1}\partial/\partial y], \quad j \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

for some matrix super-integro-differential operator $\tilde{l} \in \tilde{\mathrm{g}}^*$ of order $q \in \mathbb{N}$, related with $l \in \tilde{\mathrm{g}}^*$ by the generalized gauge transformation

$$\tilde{l}(0) - c\mathbf{1}\partial/\partial y = \mathcal{B}(0)^{-1}(l(0) - c\mathbf{1}\partial/\partial y)\mathcal{B}(0), \tag{5}$$

where $\mathcal{B}(0) \in \tilde{\mathrm{g}}_+$ is a matrix superdifferential operator of order $s \in \mathbb{N}$ with constant coefficients, at the initial moment of the time $t_j \in \mathbb{R}$ for every $j \in \mathbb{N}$.

Theorem 1. *If for every $j \in \mathbb{N}$ at the initial moment of the time $t_j \in \mathbb{R}$ the matrix super-integro-differential operators $l, \tilde{l} \in \tilde{\mathrm{g}}^*$ of order $q \in \mathbb{N}$, satisfying the equations* (3) *and* (4)*, are related by the relationship* (5)*, there exist such matrix superdifferential operators of orders $q+s$ and s accordingly, where $s \in \mathbb{Z}_+$, $s < q$, that the equalities*

$$l = \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}, \quad \tilde{l} = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A} - c\partial\mathcal{B}/\partial y) \tag{6}$$

hold. The operators $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \tilde{\mathrm{g}}_+$ obey the following systems of evolution equations

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}/dt_j &= (\nabla_l \gamma_j(l))_+ \mathcal{A} - \mathcal{A}(\nabla_l \gamma_j(\tilde{l}))_+ - c(\partial(\nabla_l \gamma_j(l))_+/\partial y)\mathcal{B}, \\ d\mathcal{B}/dt_j &= (\nabla_l \gamma_j(l))_+ \mathcal{B} - \mathcal{B}(\nabla_l \gamma_j(\tilde{l}))_+, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{7}$$

The equalities (6) determine the Backlund transformation

$$P : (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}} \mapsto (l, \tilde{l}) \in \tilde{\mathrm{g}}^* \oplus \tilde{\mathrm{g}}^*. \tag{8}$$

Theorem 2. *For every $j \in \mathbb{N}$ the system of evolution equations* (7)*, given on the subspace $\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+ \subset \tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}}$, is Hamiltonian with respect to the Poisson bracket $\{.,.\}_{\mathcal{L}}$, which arises as a reduction of the Poisson bracket $\{.,.\}_{\bar{\mathcal{L}}}$ with the corresponding Poisson operator $\bar{\mathcal{L}} : T^*(\tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}}) \to T(\tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}})$ such as $\bar{\mathcal{L}} = (P')^{-1}(\Theta \oplus \tilde{\Theta})(P'^*)^{-1}$, where $\Theta, \tilde{\Theta} : T^*(\tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}}) \to T(\tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}})$ are Poisson operators generating the Lie-Poisson bracket $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ at points $l, \tilde{l} \in \tilde{\mathrm{g}}^*$ accordingly, $P'^* : T^*(\tilde{\mathrm{g}}^* \oplus \tilde{\mathrm{g}}^*) \to T^*(\tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}})$ is an operator adjoint to the Frechet derivative $P' : T(\tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}}) \to T(\tilde{\mathrm{g}}^* \oplus \tilde{\mathrm{g}}^*)$ of the Backlund transformation* (8) *and $(P'^*)^{-1}$ is an operator inverse to P', on $\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+$ and the Hamiltonians $\bar{H}_j \in \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+)$, $j \in \mathbb{N}$, in the form*

$$\bar{H}_j(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \gamma_j(l)|_{l=\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}} + \gamma_j(\tilde{l})|_{\tilde{l}=\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A}-c\partial\mathcal{B}/\partial y)}.$$

The procedure of reducing the Poisson bracket $\{.,.\}_{\bar{\mathcal{L}}}$ on the subspace $\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+ \subset \tilde{\mathrm{g}} \times \tilde{\mathrm{g}}$ is described and the Poisson operator $\mathcal{L} : T^*(\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+) \to T(\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+)$, related with the Poisson bracket $\{.,.\}_{\mathcal{L}}$ on $\tilde{\mathrm{g}}_+ \times \tilde{\mathrm{g}}_+$, is found in an explicit form.

The reductions of the hierarchy (7) on the coadjoint orbits for the central extension $\hat{\mathrm{g}}$ with taking into account the Backlund transformation (8) are shown to lead to new integrable hierarchies of nonlinear dynamical systems on matrix functional supermanifolds of two commuting and one anticommuting independent variables, being Hamiltonian ones and possessing infinite sequences of conservation laws.

e-mail: ohen@ukr.net

Inverse free boundary value problem for degenerate parabolic equation

Nadiia Huzyk

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Ukraine

In a free boundary domain $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, where $h = h(t)$ is an unknown function, it is considered an inverse problem for simultaneous determination of the time dependent coefficients $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ in one-dimensional degenerate parabolic equation

$$u_t = t^\beta a(t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t) \qquad (1)$$

with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \qquad (2)$$

boundary conditions

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \qquad (3)$$

and overdetermination conditions

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (4)$$

$$\int_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \qquad (5)$$

$$\int_0^{h(t)} x^2u(x,t)dx = \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (6)$$

It is known, that $a = a(t)$ is a strongly positive continuous function and degeneration of the equation (1) is caused by power function t^β. It is studied the case of weak degeneration while $0 < \beta < 1$.

Using the apparatus of Green's functions for the initial-boundary value problems for the parabolic equation and Schauder Fixed Point Theorem the existence of the local solution $(b_1, b_2, h, u) \in (C[0,T_0])^2 \times C^1[0,T_0] \times C^{2,1}(\Omega_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$ to the problem (1)-(6) is established. The proof of the uniqueness of the local solution to this problem is based on the properties of the solutions to the homogeneous integral equations with integrable kernels.

e-mail: hryntsiv@ukr.net

Multivariate Activation Functions

Andrii Ivaniuk

National University of "Kyiv-Mohyla Academy Kyiv, Ukraine

In algebra and geometry, functions and transformations are fundamental concepts that map and manipulate spaces. In the context of neural networks, activation functions serve as these transformations, significantly impacting the model's capability to map input spaces to output spaces effectively. Traditional univariate activation functions have been extensively explored, but multivariate activation functions, which map vectors to vectors, have not been as thoroughly investigated. While multivariate functions are less common in recent studies, there are notable examples, such as Gated Linear Units (GLUs) [**?**], which can be considered as bivariate activation functions. This work aims to explore the geometric transformations enabled by multivariate activation functions for sequential data modeling, specifically focusing on Gaussian Mixture Models (GMM), interpolation-based methods, and rational activation functions (RAF).

Gaussian Mixture Models (GMMs) Activation Functions provide a probabilistic framework that can be interpreted algebraically as a weighted sum of Gaussian functions. These mixtures serve as a multivariate activation function by mapping input vectors into a transformed space using a combination of Gaussian distributions:

$$\mathrm{GMM}(x) = \sum_{i=1}^{K} \pi_i \mathcal{N}(x; \mu_i, \Sigma_i).$$

Here, the parameters π_i, μ_i, and Σ_i define the mixture components' weights, means, and covariance matrices, respectively, allowing a geometric interpretation of the transformation as a weighted blend of geometric shapes defined by the Gaussian functions.

Interpolation-based activation functions operate by linearly interpolating between predefined points in the input space, which can be seen as a geometric operation of navigating within a convex hull defined by these points. Given an input tensor $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{batch} \times \mathrm{seq\_length} \times \mathrm{dim}}$, the function computes interpolation ratios and combines them algebraically:

$$r = \mathrm{ratio}_0 \cdot b_0 + (1 - \mathrm{ratio}_0) \cdot b_1,$$

where b_0 and b_1 are intermediate points derived from the input space, allowing a controlled geometric transformation based on learnable parameters.

Rational Activation Functions (RAFs), widely studied in algebra and previously applied as activation functions to univariate inputs [**?**], provide a natural extension to activation functions when applied to multivariate inputs. Rational Activation Functions (RAF) represent complex transformations by rational polynomials, allowing the mapping of input vectors into a new space through algebraic fractions:

$$RAF2D(x) = \frac{a_{00} + a_{01}x_2 + a_{10}x_1 + a_{11}x_1x_2}{1 + |b_{00} + b_{01}x_2 + b_{10}x_1 + b_{11}x_1x_2|},$$

where the parameters a_{ij} and b_{ij} in the numerator and denominator, respectively, define a multivariate function that can model complex geometries within the input space.

From an algebraic and geometric standpoint, multivariate activation functions such as first-degree rational functions and interpolation functions offer promising new transformations for neural network design. These functions provide flexible and powerful mappings from input to output spaces, allowing the network to adapt its geometry according to the data. While GMM-based activations introduce complexity, they also offer rich geometric interpretations. It is hypothesized that flexibility and complexity of these multivariate functions make them valuable tools in the ongoing development of neural network architectures.

References

e-mail: a.ivaniuk@ukma.edu.ua

Solving problem for impulsive differential equations with loadings

Zhazira Kadirbayeva

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

We consider the following linear problem for impulsive differential equations with loadings:

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m} A_i(t) \lim_{t\to\theta_i+0} \dot{x}(t) + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = \varphi_i, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

where $(n\times n)$-matrices $A_i(t)$, $(i=\overline{0,m})$, and n-vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities of the first kind at the points $t=\theta_i$, $(i=\overline{1,m})$. B_j and C_j, $(j=\overline{0,m})$ are constant $(n\times n)$ - matrices, and φ_i, $(i=\overline{1,m})$ are constant n vector functions, $0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_m<\theta_{m+1}=T$.

A solution to problem (1) - (3) is a piecewise continuously differentiable vector function $x(t)$ on $[0,T]$ which satisfies the system of loaded differential equations (1) on $[0,T]$ except the points $t=\theta_i$, $(i=\overline{1,m})$, the boundary condition (2), and conditions of impulse effects at the fixed time points (3).

Mathematical modeling in fields such as automatic control theory, nuclear reactor theory, electrical and mechanical engineering, earthquake monitoring, and dynamic systems often results in boundary value problems involving loaded differential equations with impulse effects. This highlights the importance of studying such problems [1, 2].

The main interest of this paper is to propose a numerical algorithm for solving a two-point boundary value problem for impulsive differential equations with loadings (1)-(3), using the Dzhumabaev parameterization method [3].

The author was supported by the grant no. AP23488811 of the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

References

[1] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, *Comp. Appl. Math.*, **37**:4 (2018), 4966–4976.

[2] Kadirbayeva Zh.M., Kabdrakhova S.S., Mynbayeva S.T. A computational method for solving the boundary value problem for impulsive systems of essentially loaded differential equations, *Lobachevskii J. Math.*, **42** (2021), 3675–3683.

[3] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

e-mail: hryntsiv@ukr.net

On a problem of Rudin concerning Baire classification of separately continuous functions

Olena Karlova

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Walter Rudin proved [1] that if X is a metric space, Y is a topological space and Z is a locally convex space, then every separately continuous function $f : X \times Y \to Z$ is a limit of pointwise convergent sequence of jointly continuous functions $f_n : X \times Y \to Z$.

We will discuss old and new results related to the following question due to Rudin, which is still open: is the above mentioned proposition valid for an arbitrary topological vector space Z?

The talk is partially based on a preprint [2].

References

[1] W. Rudin, *Lebesgue first theorem*, Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies **78** (1981), 741–747.

[2] O. Karlova, *On a problem of Rudin concerning Baire classification of separately continuous functions*, in preparation.

e-mail: o.karlova@chnu.cv.ua

Method of Symmetric Functions in Machine Learning Algorithms

Volodymyr Kimak, Andriy Zagorodnyuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Machine learning algorithms often are invariant with respect to permutations of input data instances. This observation suggested to use permutation invariant sets instead of vectors of a fixed dimension for organizing of input data (see [2]). For this purpose, actually, more suitable are multisets (sets with possible repetitions of elements). By a *multiset of the length* n, x we mean an unordered collections of numbers $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. We say that $l(x) = n$ and $x = y$ if and only if $l(x) = l(y)$ and there is a permutation $\{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ such that $x_1 = y_{i_1}$, $x_2 = y_{i_2}$, ... , $x_n = y_{i_n}$. In this paper we consider algebraic structures on a set of finite multisets consisting of nonzero real or complex numbers.

Let K be an arbitrary set. The most important cases for us are if K is a subset of the field of real $\mathbb{R}$ or complex $\mathbb{C}$ numbers and $K \not\ni 0$. We denote by Λ_K the set of all finite sequences of elements in K,

$$\Lambda_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Let us introduce the following relation of equivalence on Λ_K,

$$x \sim z \text{ if and only if } (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$$

for some permutation σ on the set of natural numbers $\mathbb{N}$. We denote by $\Lambda_K/\sim$ the quotient set with respect to the equivalence, and by $[x]$ the class of the equivalence containing $x \in \Lambda_K$. The quotient set $\Lambda_K/\sim$ can be identified with the set of all finite multisets of elements in K so that every class $[x] = [(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ will be identified with the multiset $\{[x]\} := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, and we denote by $\mathbf{0}$ the class containing the empty set.

Definition 1. *A mapping $f\colon \Lambda_K \to Y$, where Y is a set, is called symmetric if for every $x \in \Lambda_K$, $f(x) = f(z)$ whenever $x \sim z$.*

From the definition we obviously have the following important result.

Theorem 1. *Let Y be a set and $f\colon \Lambda_K \to Y$. The mapping f is symmetric if and only if there exists a map $\widehat{f}\colon \Lambda_K/\sim \to Y$ such that*

$$f(x) = \widehat{f}([x]), \quad x \in \Lambda_K.$$

Clearly, even if Λ_K is a subset in a linear space, the quotient map $x \mapsto [x]$ is nonlinear, that is, we can not to extend the coordinate-wise addition in Λ_K to $\Lambda_K/\sim$. However, there is the natural operation of union of multisets that have properties of the addition. For given $x, z \in \Lambda_K$ we define

$$[x] + [z] = \big[\{[x]\} \cup \{[z]\}\big].$$

From the definition it follows that the operation "+" does not depend on representatives.

Proposition 6. *The set $\Lambda_K/\sim$ with the operation "+" is a monoid, that is, a commutative semigroup with neutral element* $\mathbf{0}$.

Let $\gamma(a, b)$ be a function of two variables $a, b \in K$ with values in K such that $\gamma\big(\gamma(a, b), c\big) = \gamma\big(a, \gamma(b, c)\big)$ for all $a, b, c \in K$. Let us define the following operation of multiplication on $\Lambda_K/\sim$ associated with γ. For all $x, z \in K$ we set

$$[x] \odot_\gamma [z] = \big[\{\gamma(x_i z_j)\}\big],$$

and

$$[x] \odot_\gamma \mathbf{0} = \mathbf{0} \odot_\gamma [x] = \mathbf{0}.$$

Theorem 2. *If the function is as above, then* $(\Lambda_K/\sim,+,\odot_\gamma)$ *is a semiring. If* $\gamma(a,b)=\gamma(b,a)$*, then the semiring is commutative. If there exists* $e\in K$ *such that* $\gamma(e,a)=\gamma(a,e)=a$ *for every* $a\in K$*, then* $(\Lambda_K/\sim,+,\odot_\gamma)$ *is a unital semiring and* $\mathbf{e}:=[(e)]$ *is the identity element (the unit) in* $(\Lambda_K/\sim,+,\odot_\gamma)$.

Доведення. By the definition of γ, the operation "$\odot_\gamma$" is well defined on $\Lambda_K/\sim$ and associative. Thus $(\Lambda_K/\sim,\odot_\gamma)$ is a semigroup. Let us check the distributive low.

$$[w]\odot_\gamma([x]+[z])=[\{w_1,\ldots,w_k\}]\odot_\gamma[\{x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_m\}]$$

$$=[\{\gamma(w_ix_j)\}_{i=1,j=1}^{k,n}]+[\{\gamma(w_iz_j)\}_{i=1,j=1}^{k,m}]=[w]\odot_\gamma[x]+[w]\odot_\gamma[z].$$

Hence, $\Lambda_K/\sim$ is a semiring. Clearly that if $\gamma(a,b)=\gamma(b,a)$, then the semiring is commutative, and if there exists $e\in K$ such that $\gamma(e,a)=\gamma(a,e)=a$, then $[x]\odot_\gamma\mathbf{e}=\mathbf{e}\odot_\gamma[x]=[x]$ for every $[x]\in\Lambda_K/\sim$. □

Example 3. *We consider several cases of the set* K *and the function* γ *satisfying conditions of Theorem 2.*

1. *Let* $K=(\mathcal{D},\cdot)$ *be a semigroup (for example,* $K=\mathbb{C}\setminus\{0\}$*) and* $\gamma(a,b)=ab$.
2. *Let* K *be a Linear space and* $\gamma(a,b)=a+b$*. Then* $[0]=\mathbf{e}$ *is the unit in* $\Lambda_K/\sim$.
3. *Let* K *be an ordered set with respect to a linear order "*$\geq$*" and* K *contains a maximal element* μ*. Set* $\gamma(a,b)=\min(a,b)$*. Then* $\mathbf{e}=[\mu]$ *is the unit.*

For each of these cases, $(\Lambda_K/\sim,+,\odot_\gamma)$ *is a semiring.*

This research was supported by the National Research Foundation of Ukraine, 2023.03/0198 "Analysis of the spectra of countably generated algebras of symmetric polynomials and possible applications in quantum mechanics and computer science".

References

[1] Jawad, F.; Zagorodnyuk, A. Supersymmetric polynomials on the space of absolutely convergent series. *Symmetry* **2019**, *11*, 1111. https://doi.org/10.3390/sym11091111

[2] Zaheer, M.; Kottur, S.; Ravanbakhsh, S.; Poczos, B.; Salakhutdinov, R.R.; Smola, A.J. Deep sets. In *Advances in Neural Information Processing Systems*; Guyon, I., Luxburg, U.V., Bengio, S., Wallach, H., Fergus, R., Vishwanathan, S., Garnett, R., Eds.; 2017; pp. 3391–3401. Available online: https://papers.nips.cc/paper/2017 (accessed on 26 December 2021).

e-mail: vova.kimak@gmail.com, andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua

Bifurcation of tori for parabolic systems of differential equations with small diffusion

Ivan Klevchuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Consider a parabolic system [1–6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, \overline{u}) \tag{1}$$

with periodic condition

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x).$$

where ε is a small positive parameter, $u \in \mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, $d_k > 0$ for $1 \leq k \leq n$, $A_0 = diag(i\omega_1, i\omega_2, ..., i\omega_n)$, $\omega_k > 0$ for $1 \leq k \leq n$, the function $F(u, \overline{u}) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ five times continuously differentiable in u and $\overline{u}$, $F(0, 0) = 0$, $F(u, \overline{u}) = O(|u|^2$ as $|u| \to 0$.

Assume that the following condition A is satisfied:

$$p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n \neq m \quad \text{при} \quad 0 < |p_1| + \cdots + |p_n| < 6,$$

where m, p_1, ..., p_n are integer numbers.

We transform system (1) with the use of the substitution

$$u = v + \sum_{i=2}^{4} W_i(v, \overline{v}), \tag{2}$$

where W_2, W_3 and W_4 are forms of the second, third, and fourth order, respectively. Transformation (2) can be chosen so that the equation for v take the form

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_0 v + \varepsilon A_1 v + G(v, \overline{v})v + V(v, \overline{v}), \tag{3}$$

where $G(v, \overline{v})$ is a diagonal matrix with elements $g_k(v, \overline{v}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j \overline{v}_j$, $1 \leq k \leq n$, on the diagonal, $V(v, \overline{v}) = O(|v|^5)$ as $|v| \to 0$. For $\varepsilon = 0$ we obtain a system of ordinary differential equations. Let us assume that the zero solution of (3) for $\varepsilon = 0$ and $V(v, \overline{v}) \equiv 0$ is asymptotically stable.

Let the inequality

$$\xi_k > d_k m^2, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

be satisfied and the solution of the system

$$\varepsilon \left[\xi_k - d_k m^2\right] + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\varepsilon) r_j^2 = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

exist. Here $\xi_k = Re\ \mu_k$, μ_k are the diagonal elements of matrix A_1, $b_{kj} = Re\ a_{kj}$. We study existence and stability of an arbitrarily large finite number of tori.

References

1. *Klevchuk I.I., Fodchuk V.I.* Bifurcation of singular points of differential-functional equations // Ukrainian Mathematical Journal – 1986. – **38**, No. 3. – P. 281 – 286.

2. *Klevchuk I.I.* On the reduction principle for functional-differential equations of the neutral type // Differential Equations – 1999. – **35**, No. 4. – P. 464 – 473.

3. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Ukrainian Math. J. – 1999. **51**, No. 10. – P. 1512 – 1524.

4. *Klevchuk I.I.* Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // Journal of Mathematical Sciences – 2016. **215**, No. 3. – P. 341 – 349.

5. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // Journal of Mathematical Sciences – 2017. **226**, No. 3. – P. 285 – 295.

6. *Klevchuk I.I.* Existence and stability of traveling waves in parabolic systems of differential equations with weak diffusion // Carpathian Mathematical Publications. – 2022. **14**, No 2. - P. 493-503.

e-mail: i.klevchuk@chnu.edu.ua

Dean–Kawasaki equation with initial condition in the space of positive distributions

Vitalii Konarovskyi
University of Hamburg, Hamburg, Germany
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The Dean–Kawasaki equation was proposed by Dean [1] and Kawasaki [2] to describe the density ρ of fluctuating particles in Langevin dynamics

$$\partial_t \rho = \beta^{-1} \Delta \rho + \nabla \cdot \left(\rho \nabla \frac{\delta F}{\delta \rho}[\rho] \right) + \nabla \left(\sqrt{\rho} \eta \right).$$

In this nonlinear, singular stochastic partial differential equation, where β is the inverse temperature, F describes the interaction of the particles within the fluid and η is a vector of space-time white noise. Phrasing the Dean–Kawasaki equation as a martingale problem in the space of finite measures, in [3, 4] it was shown that its solutions exist only for initial condition of the form $\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_i}$ for some $n \in \mathbb{N}$. Furthermore, these solutions are then given by an empirical measure of particles X_t^i following a system of coupled stochastic differential equations with initial conditions $X_0^i = x_i$ [4].

In this talk, we will show that even allowing initial conditions with infinite mass, e.g. the Lebesgue measure, the equation only admits solutions if the initial condition is a sum of Dirac masses. We work on the space of tempered measures $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ on $\mathbb{R}^n$, i.e. the space of measures which integrate all Schwartz functions $\mathcal{S}$. Here, we consider a simplified version of the stochastic partial differential equation

$$\partial_t \rho = \frac{\alpha}{2} \Delta \rho + \nabla \left(\sqrt{\rho} \eta \right) \tag{1}$$

without interaction, where $\alpha > 0$.

Definition 1. *A continuous $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$-valued process $(\mu_t)_{t \geq 0}$ is a solution to the Dean–Kawasaki equation* (1) *with initial condition $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ if $\mu_0 = \nu$ and*

$$M_t(\varphi) = \langle \mu_t, \varphi \rangle - \langle \mu_0, \varphi \rangle - \int_0^t \frac{\alpha}{2} \langle \mu_s, \Delta \varphi \rangle \, ds, \quad t \geq 0,$$

is a martingale with respect to the natural filtration generated by $(\mu_t)_{t \geq 0}$ with quadratic variation

$$[M.(\varphi)]_t = \int_0^t \left\langle \mu_s, |\nabla \varphi|^2 \right\rangle ds, \quad t \geq 0,$$

for each $\varphi \in \mathcal{S}$.

Our main result reads as follows.

Theorem 1. *Let $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Then the Dean–Kawasaki equation* (1) *has a unique in law solution $(\mu_t)_{t \geq 0}$ started from ν if and only if $\nu(\mathbb{R}^d)\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ and there exists at most countable family x_i, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, such that $\nu = \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$. Moreover, in this case,*

$$\mu_t = \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in I} \delta_{B^i_{\alpha t}}, \quad t \geq 0,$$

where $(B_t^i)_{t \geq 0}$, $i \in I$, is a family of independent d-dimensional Brownian motions with $B_0^i = x_i$ a.s.

This is the joint work with Fenna Müller (Leipzig University) (see [5]).

References

[1] James Dean, *Langevin equation for the density of a system of interacting langevin processes*, Journal of Physics A: Mathematical and General (1996).

[2] Kyozi Kawasaki, *New method in non-equilibrium statistical mechanics of cooperative systems*, SYNERGETICS Cooperative Phenomena in Multi-Component Systems, 1973.

[3] Vitalii Konarovskyi, Tobias Lehmann, and Max-K. von Renesse, *Dean-Kawasaki dynamics: ill-posedness vs. triviality*, Electron. Commun. Probab. **24** (2019), Paper No. 8, 9. MR 3916340

[4] Vitalii Konarovskyi, Tobias Lehmann, and Max von Renesse, *On Dean-Kawasaki dynamics with smooth drift potential*, J. Stat. Phys. **178** (2020), no. 3, 666–681. MR 4059955

[5] Vitalii Konarovskyi, and Fenna Müller, *Dean-Kawasaki equation with initial condition in the space of positive distributions*, arXiv: 2311.10006.

e-mail: vitalii.konarovskyi@uni-hamburg.de

One-point discontinuity of separately continuous functions of several variables

Mykola Kozlovskyi
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Investigations of the discontinuity points set of separately continuous functions of two or many variables (i.e. functions that are continuous with respect to each variable) were started with Rene Baire. In connection with Namioka's theorem [1] naturally arises the question of characterization of the discontinuity points set of separately continuous functions defined on the product of two compact spaces. This question was formulated by Piotrowski [2] and it is still open.

Particular interest is investigations of separately continuous functions and their analogs with one-point set of points of discontinuity. In particular at the [3] there were obtained necessity and sufficiency for existing separately continuous function with one-point set of points of discontinuity defined on the product of two compact spaces. Also, it was proved in [5] that the existence of separately continuous functions with given one-point set of points of discontinuity of G_δ type is closely related to the properties of P-filter, and the answer to this question is independent of ZFC (Zermelo-Fraenkel set theory with the Axiom of Choice).

Here we will generalize that result for function of several variables. But first let us look definition of strongly separately continuous function witch is used in the generalized theorem.

Let $n \geq 2, X_1, ..., X_n$ are topological spaces, $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\mathcal{S}_n = \{S \subset \{1, ..., n\} : S \neq \emptyset\}$, $S \in \mathcal{S}_n$ and $T = \{1, ..., n\} \setminus S$, $Y = \prod\limits_{s \in S} X_s$, $Z = \prod\limits_{t \in T} X_t$. For every point $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ let us put $x_{|_S} = (x_s)_{s \in S}$ and $x_{|_T} = (x_t)_{t \in T}$. It is obvious that $x_{|_S} \in Y$ and $x_{|_T} \in Z$, and the function $\varphi_S : X \to Y \times Z$,

$$\varphi_S(x) = \big(x_{|_S}, x_{|_T}\big)$$

is a homeomorphism.

Definition 1. *The function $f : X \to \mathbb{R}$ is called a S-continuous at the point $x_0 \in X$ if the function $f_S : Y \times Z \to \mathbb{R}$,*

$$f_S(y, z) = f(\varphi_S^{-1}(y, z))$$

is continuous by the variable y at the point $\varphi_S(x_0)$. If the function f is S-continuous at every point $x \in X$, then the function f is called S-continuous.

Definition 2. *Let $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_n$ then the function $f : X \to \mathbb{R}$ is called separately continuous by groups from the system $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$-continuous) if the function f is S-continuous for every $S \in \mathcal{S}$.*

Definition 3. *The function $f : X \to \mathbb{R}$ is called strongly $(n-1)$ -continuous (or strongly separately continuous) if it is separately $\mathcal{S}_n$-continuous.*

The next proposition from [4] shows the relation for separately continuity by groups between two systems.

Proposition 7. *Let $n \geq 2$, $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^{'}$ are system of subsets from $\mathcal{S}_n$ such that for any $S \in \mathcal{S}$ there exists $S^{'} \in \mathcal{S}^{'}$ such that $S \subseteq S^{'}$. Let $X_1, ..., X_n$ are topological spaces and $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{S}^{'}$-continuous. Then f is $\mathcal{S}$-continuous.*

The following theorem from [4] is the generalization of the result from [3].

Theorem 1. *Let $n \geq 2, X_1, ..., X_n$ are compact Hausdorff spaces, $x_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, $x_{0,k}$ is a non-isolated point at X_k for every $1 \leq k \leq n$. Then the following statements are equivalent:*

(i) there exists separately continuous function $f : \prod_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ *such that* f *is strongly* $(n-1)$-*continuous with* $D(f) = \{x_0\}$;
(ii) there exists separately continuous function $f : \prod_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ *such that* f *is* $\mathcal{S}$-*continuous for any system* $\mathcal{S}$ *of sets from* $\mathcal{S}_n$ *and* $D(f) = \{x_0\}$;
(iii) there exists separately continuous function $f : \prod_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ *with* $D(f) = \{x_0\}$;
(iv) there exists a sequence $(U_m)_{m=1}^{\infty}$ *of non-empty open set* U_m *at the space* $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$ *such that* $U_m \to x_0$.

In the [6] we proved the following proposition.

Proposition 8. *Let* $n \geq 2$. *The following statements are equivalent*
(i) Any two P-*filters from* $\mathcal{F}$ *are near coherent.*
(ii) For every $n \geq 2$ *any* n P-*filters from* $\mathcal{F}$ *are near coherent.*
(iii) For some $n \geq 2$ *any* n P-*filters from* $\mathcal{F}$ *are near coherent.*

And the main result of at the [6] is the generalization of the result from [5].

Theorem 2. *The following statements are equivalent:*
(i) for any $n \geq 2$, *completely regular spaces* $X_1, ..., X_n$ *and non-isolated* G_δ-*points in correspondi-ng spaces* $x_{10} \in X_1, ..., x_{n0} \in X_n$, *there exists a strongly separately continuous function* $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ *with* $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$;
(ii) any two P-*filters from* $\mathcal{F}$ *are near coherent.*

References

[1] Namioka I. Separate contimuity and joint continuity, *Pacif. J. Math.* 51(2) (1974) 515-531.

[2] Piotrowski Z. Separate and joint continuity, *Real. Anal. Exch.* 11(2) (1985-1986).

[3] Mykhaylyuk V.V. One-point discontinuities of separately continuous functions on the product of two compact spaces, *Ukrainian Math. J.* 57(1) (2005) 94-101 (In Ukrainian).

[4] Kozlovskyi, M. One-point discontinuity of separately continuous functions of several variables on a product of compact spaces, *Proceedings of the International Geometry Center* 16(2) (2023) 105-115 (In Ukrainian).

[5] T. O. Banakh. O. V. Maslyuchenko. V. V. Mykhaylyuk. *Discontinuous Separately Continuous Functions and Near Coherence of P-Filters.* Real Anal. Exchange 2007, **32** (2) 335 - 348.

[6] Kozlovskyi, M. *Discontinuous strongly separately continuous function of several variable and near coherence of two P-filters*, Carpathian Mathematical Publications (Accepted)

e-mail: kozlovskyi.mykola@chnu.edu.ua

Numerical stability of the branched continued fraction expansion of the ratio $H_4(a,b;c,b;\mathbf{z})/H_4(a+1,b;c+1,b;\mathbf{z})$

Ilona-Anna Lutsiv

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Horn's hypergeometric function H_4 is defined by double power series (see, [1])

$$H_4(a,b;c,d;\mathbf{z})=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(a)_{2r+s}(b)_s}{(c)_r(d)_s}\frac{z_1^r}{r!}\frac{z_2^s}{s!},\quad |z_1|<p,\ |z_2|<q, \tag{1}$$

where a, b, c and d are complex constants; c and d are not equal to a non-positive integer; p and q are positive numbers such that $4p=(q-1)^2$ and $q\neq 1$, $(\cdot)_k$ is the Pochhammer symbol defined for any complex number α and non-negative integer n by $(\alpha)_0=1$ and $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$.

The paper [2] provides the formal expansion

$$\frac{H_4(a,b;c,b;\mathbf{z})}{H_4(a+1,b;c+1,b;\mathbf{z})}=1-z_2-\cfrac{h_1z_1}{1-z_2-\cfrac{h_2z_1}{1-z_2-\cfrac{h_3z_1}{1-\ddots}}}, \tag{2}$$

where

$$h_k=\frac{(2c-a+k-1)(a+k)}{(c+k-1)(c+k)},\quad k\geq 1. \tag{3}$$

Let n be an arbitrary fixed natural number. For each $1\leq k\leq n$, let $\widehat{a}_{1,k-1}$ and $\widehat{a}_{0,k}$ denote rounded values of the elements $a_{1,k-1}$ and $a_{0,k}$, respectively, of a given branched continued fraction

$$1+a_{1,0}+\cfrac{a_{0,1}}{1+a_{1,1}+\cfrac{a_{0,2}}{1+a_{1,2}+\cfrac{a_{0,3}}{1+\ddots}}}. \tag{4}$$

The number

$$\widehat{f}_n=1+\widehat{a}_{1,0}+\cfrac{\widehat{a}_{0,1}}{1+\widehat{a}_{1,1}+\cfrac{\widehat{a}_{0,2}}{1+\widehat{a}_{1,2}+\cfrac{\widehat{a}_{0,3}}{1+\ddots+\widehat{a}_{1,n-2}+\cfrac{\widehat{a}_{0,n-1}}{1+\widehat{a}_{1,n-1}+\widehat{a}_{0,n}}}}}$$

is the computed (approximate) value of

$$f_n=1+a_{1,0}+\cfrac{a_{0,1}}{1+a_{1,1}+\cfrac{a_{0,2}}{1+a_{1,2}+\cfrac{a_{0,3}}{1+\ddots+a_{1,n-2}+\cfrac{a_{0,n-1}}{1+a_{1,n-1}+a_{0,n}}}}}.$$

Definition 1. *A numerical stability set Ω is a set to which for any $\varepsilon>0$ one can find $\delta>0$ depending only on ε and Ω such that, for all $n\geq 1$*

$$\left|\widehat{f}_n-f_n\right|<\varepsilon\cdot|f_n|$$

for every branched continued fraction (4) with all $a_{1,k-1},a_{0,k}\in\Omega$ and $\widehat{a}_{1,k-1},\widehat{a}_{0,k}\in\Omega$ such that, for all $k\geq 1$

$$\left|\frac{\widehat{a}_{1,k-1}-a_{1,k-1}}{a_{1,k-1}}\right|<\delta\quad\text{and}\quad\left|\frac{\widehat{a}_{0,k}-a_{0,k}}{a_{0,k}}\right|<\delta.$$

The following is true (see, [3]).

Theorem 1. *Let there exists a constant* α, $0 < \alpha < 1$, *such that*

$$|\alpha_1| \le \alpha, \quad |\alpha_2| \le \alpha, \quad \textit{and} \quad |\beta_k| \le \alpha \quad \textit{for all} \quad k \ge 1, \tag{5}$$

where α_1, α_2, *and* β_k, $k \ge 1$, *are relative errors of* z_1, z_2, *and* h_k, $k \ge 1$, *respectively, which are defined as follows*

$$\widehat{z}_1 = z_1(1+\alpha_1), \quad \widehat{z}_2 = z_2(1+\alpha_2), \quad \widehat{h}_k = h_k(1+\beta_k), \quad 1 \le k \le n,$$

for all $n \ge 1$. *Then:*

(A) The set

$$\mathrm{H}_{h,l} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| < l(1-l)/(2h), \ |z_2| < (1-l)/2 \right\}, \tag{6}$$

where

$$h = \max_{k \in \mathbb{N}} \{|h_k|, \ |\widehat{h}_k|\}, \quad l \in (0, 1/3) \cup (1/3, 1), \tag{7}$$

forms the numerical stability set of the branched continued fraction (2).

(B) If ε_n *denotes the relative errors of* n*th approximant of* (2), *then, for* $n \ge 1$,

$$|\varepsilon_n| \le \frac{4\alpha}{(1+l+|3l-1|)(1-\alpha)} \left(\frac{1-l}{2} + \frac{2l(1-l)}{1+l+|3l-1|} \left(2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \frac{1-\eta^n}{1-\eta}, \tag{8}$$

where

$$\eta = \begin{cases} 2l/(1-l), \ \textit{if}\, 1 < l < 1/3, \\ (1-l)/(2l), \ \textit{if}\, 1/3 < l < 1. \end{cases}$$

Corollary 1. *Let there exists a constant* α, $0 < \alpha < 1$, *satisfying* (5), *where* α_1, α_2, *and* β_k, $k \ge 1$, *are relative errors of* z_1, z_2, *and* h_k, $k \ge 1$, *respectively, of the branched continued fraction*

$$\cfrac{1}{1 - z_2 - \cfrac{h_1 z_1}{1 - z_2 - \cfrac{h_2 z_1}{1 - \ddots}}}, \tag{9}$$

where

$$h_1 = \frac{2}{c}, \quad h_k = \frac{k(2c+k-3)}{(c+k-2)(c+k-1)} \quad \textit{for all} \quad k \ge 2.$$

Then:

(A) The set (6), *where* h *and* l *are defined in* (7), *forms the numerical stability set of* (9).

(B) If ε_n *denotes the relative errors of the* n*th approximant of the branched continued fraction* (9), *then estimate* (8) *holds for all* $n \ge 1$.

References

[1] J. Horn, *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen*, Math. Ann., **105**, 381–407 (1931).

[2] T. Antonova, R. Dmytryshyn, I.-A. Lutsiv, S. Sharyn, *On some branched continued fraction expansions for Horn's hypergeometric function* $H_4(a, b; c, d; z_1, z_2)$ *ratios*, Axioms, **12**, № 3, 299 (2023).

[3] R. Dmytryshyn, C. Cesarano, I.-A. Lutsiv, M. Dmytryshyn, *Numerical stability of the branched continued fraction expansion of Horn's hypergeometric function* H_4, Mat. Stud., **61** (1), 51–60 (2024).

e-mail: lutsiv.ilona@gmail.com

On semitopological simple inverse ω-semigroups with compact maximal subgroups

Oleg Gutik, Kateryna Maksymyk
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine

We shall follow the terminology of [4]. A semigroup S is said to be *simple* (0-*simple*) if S has no proper two-sided ideals (if S has the zero $\mathbf{0}$ and $\{\mathbf{0}\}$ is the unique proper two-sided ideal of S). A semigroup S is called an ω-*semigroup* if the band $E(S)$ is order isomorphic to $(\omega, \geqslant)$. Also, an inverse semigroup S is 0-simple ω-semigroup if S is 0-simple and the subset of non-zero idempotents $E(S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ is order isomorphic to $(\omega, \geqslant)$.

Using the construction of the bicyclic monoid Bruck build the construction of isomorphic embedding of any (inverse) semigroup into a simple inverse monoid. Later Reilly and Warne generalized the Bruck construction for the description of of the structure of bisimple regular ω-semigroups.

If S is a trivial monoid then $\mathbf{BR}(S,\theta)$ is isomorphic to the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ and in case when θ is an annihilating homomorphism (i.e., $(s)\theta = 1_S$), then $\mathbf{BR}(S) = \mathbf{BR}(S,\theta)$ is called the *Bruck semigroup over monoid* S [5]. Also Reilly and Warne proved that every bisimple regular ω-semigroup is isomorphic to the Bruck–Reilly extension of a some group. Also Reilly and Warne proved that every bisimple regular ω-semigroup is isomorphic to the Bruck–Reilly extension of a some group [12, 13].

Well-known Clifford's Theorem state that an inverse semigroup S is Clifford (i.e., $E(S)$ is contained in the center of S) if and only if S is a semilattice of groups [11].

In [8] Kochin showed that every simple inverse ω-semigroup is isomorphic to the Bruck–Reilly extension $\mathbf{BR}(S,\theta)$ of a finite chain of groups $S = [E; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$.

In the paper [6] it is proved that every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the bicyclic monoid with adjoined zero is either compact or discrete. This result was extended by Bardyla onto the a polycyclic monoid [1] and graph inverse semigroups [2], and by Mokrytskyi onto the monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero [10]. In [3] Bardyla proved that a Hausdorff locally compact semitopological semigroup McAlister Semigroup $\mathcal{M}_1$ is either compact or discrete. However, this dichotomy does not hold for the McAlister Semigroup $\mathcal{M}_2$ and moreover, $\mathcal{M}_2$ admits continuum many different Hausdorff locally compact inverse semigroup topologies [3]. Also, in [7] it is proved that the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ with adjoined zero admits distinct $\mathfrak{c}$-many shift-continuous topologies, however every Hausdorff locally compact semigroup topology on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ is discrete. Algebraic properties on a group G such that if the discrete group G has these properties, then every locally compact shift continuous topology on G with adjoined zero is either compact or discrete studied in [9].

We describe the structure of simple inverse Hausdorff semitopological ω-semigroups with compact maximal subgroups. In particular, we show that if S is a simple inverse Hausdorff semitopological ω-semigroups with compact maximal subgroups, then S is topologically isomorphic to the Bruck–Reilly extension $\left(\mathbf{BR}(T,\theta), \tau_{\mathbf{BR}}^{\oplus}\right)$ of a finite semilattice $T = [E; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ of compact groups G_α in the class of topological inverse semigroups, where $\tau_{\mathbf{BR}}^{\oplus}$ is the sum direct topology on $\mathbf{BR}(T,\theta)$. Also we prove that every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the simple inverse Hausdorff semitopological ω-semigroups with compact maximal subgroups with adjoined zero is either compact or discrete.

References

[1] S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **13** (2016), 21–28.

[2] S. Bardyla, *On locally compact semitopological graph inverse semigroups*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 19–28.
DOI: 10.15330/ms.49.1.19-28

[3] S. Bardyla, *On topological McAlister semigroups*, J. Pure Appl. Algebra **227** (2023), no. 4, 107274.
DOI: 10.1016/j.jpaa.2022.107274

[4] J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.

[5] O. V. Gutik, *Embedding of topological semigroups in simple semigroups*, Mat. Stud. **3** (1994), 10–14 (in Russian).

[6] O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **80** (2015), 33–41.

[7] O. V. Gutik and K. M. Maksymyk, *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero*, J. Math. Sci. **265** (2022), no. 3, 369–381 DOI:: 10.1007/s10958-022-06058-6

[8] B. P. Kochin, The structure of inverse ideal-simple ω-semigroups, Vestnik Leningrad. Univ. **23** (1968), no. 7, 41–50 (in Russian).

[9] K. Maksymyk, On locally compact groups with zero, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Mat. **88** (2019), 51–58. (in Ukrainian).

[10] T. Mokrytskyi, *On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of* $\mathbb{N}^n$ *with adjoined zero*, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Mat. **87** (2019), 37–45.

[11] M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[12] N. R. Reilly, *Bisimple ω-semigroups*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–169.
DOI: 10.1017/s2040618500035346

[13] R. J. Warne, *A class of bisimple inverse semigroups*, Pacif. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577.
DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563

e-mail: oleg.gutik@lnu.edu.ua, kateryna.maksymyk@lnu.edu.ua

Two topologies on the space of separately continuous functions and its compact subspaces

Oleksandr Maslyuchenko, Vadym Myronyk, Roman Ivasiuk
University of Silesia in Katowice, Poland
Yuri Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

In [1] the authors proposed a natural topologization of the space of all separately continuous functions $s : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ which was called the *topology of the layered uniform convergence.* This topology can be considered on the space $S = S(X \times Y, Z)$ of all separately continuous functions $s : X \times Y \to Z$ for any topological spaces X and Y and a metric space (Z, d). A base of this topology is given by the sets $\{t \in S : \forall p \in \mathrm{cr}E \mid d(s(p), t(p)) < \varepsilon\}$, where E is a finite subset of $X \times Y$, $\mathrm{cr}E = (X \times \mathrm{pr}_Y(E)) \cup (\mathrm{pr}_X(E) \times Y)$ is the *cross* of the set E, $\varepsilon > 0$ and $s \in S$. We call this topology the *cross-uniform topology.* Another natural topology on S is generated by the subbase consisting of the sets $\{s \in S : s(A) \subseteq W\}$, where $A = \overline{G} \cap C$, G is open in $C = \mathrm{cr}\{p\}$, $p \in X \times Y$ and W is open in a topological space Z. It is called the *cross-open topology* and we always endow the space S with this topology. In [2] we proved the following.

Theorem 1. *Let X and Y be pseudocompact spaces, Z be a metrizable space and d be a metric which generates the topology of Z. Then the cross-uniform topology on $S(X \times Y, Z)$ coincides with the cross-open topology.*

In [3, 4, 5] the authors proved that $S(X \times Y)$ is a meager, complete, barreled and bornological topological vector space for any compacts X and Y without isolated points.

Let $w(X)$ denote the weight of a topological space X and let $c(X)$ denote the cellularity of X. *The sharp cellularity* is

$$c^\sharp(X) = \sup\Big\{|\mathcal{U}|^+ : \mathcal{U} \text{ is a disjoint family of open sets in } X\Big\},$$

where $|A|$ means the cardinality of a set A and $\mathfrak{m}^+$ means the least cardinal number which is grater then the cardinal number $\mathfrak{m}$. In [2] it was proved the following results.

Theorem 2. *Let X, Y be compacts, Z be a metrizable space and K be a compact space which embeds into $S(X \times Y, Z)$ Therefore, the following inequality holds: $w(K) < \min\{c^\sharp(X), c^\sharp(Y)\}$.*

Theorem 3. *Let X, Y be infinity compacts, Z be a metrizable space which contains a homeomorphic copy of $\mathbb{R}$ and K be a compact. Then K embeds into $S(X \times Y, Z)$ if and only if*

$$w(K) < \min\{c^\sharp(X), c^\sharp(Y)\}.$$

References

[1] Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The topologization of the space of separately continuous functions*, Carpathian Mathematical Publications 2013, 5(2), 199—207.

[2] O. Maslyuchenko, V. Myronyk, R. Ivasiuk, *Compact subspaces of the space of separately continuous functions with the cross-uniform topology*, Topology and its Applications, **356** (2024) 109047, https://doi.org/10.1016/j.topol.2024.109047.

[3] H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, *Embedding of the space of separately continuous functions into the product of Banach spaces and its barrelledness*, Mathematical Bulletin of Shevchenko Scientific Society, **11** (2014), 36-50.

[4] H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, *The bornologicity of the space of separately continuous functions*, Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society, **12** (2015), 61-67.

[5] H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, *On Baireness of the space of separately continuous function*. Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine, 12 (2015) No. 3, 78-96.

e-mail: ovmasl@gmail.com, v.myronyk@chnu.edu.ua, ivasiuk.roman@chnu.edu.ua

PRINCIPAL AND FREE DEDEKIND CUTS AS CONVENIENT MODELS OF RATIONAL AND IRRATIONAL NUMBERS

Oles Mazurenko, Taras Banakh
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

We shall discuss the classical notion of a Dedekind cut and its modern interpretation as a model of a real number, namely we introduce free Dedekind cuts (modeling irrational numbers) and principal Dedekind cuts (modeling rational numbers). Such an approach will allow to treat rational and irrational numbers simultaneously avoiding known technical difficulities in justification of the theory of real numbers via Dedekind cuts.

DEFINITION. An ordered pair (A, B) of non-empty, disjoint subsets of a certain linearly ordered set $(R, <_R)$ is called *a Dedekind cut* in the set R if the set A has no maximum element, the set B has no minimum element, and for every pair of elements $(a, b) \in <_R$, we have that a belongs to A or b belongs to B.

Provided the definition, it can be proved that the union $A \cup B$ of sets from a Dedekind cut (A, B) in a certain set R covers the entire set R except possibly for one point. Therefore, the following concepts have solid ground to be defined.

DEFINITION. A Dedekind cut (A, B) in a linearly ordered set $(R, <_R)$ is called *a free Dedekind cut* if $A \cup B = R$, meaning there is no uncovered point.

DEFINITION. A Dedekind cut (A, B) in a linearly ordered set $(R, <_R)$ is called *a principal Dedekind cut* if $A \cup B \neq R$, meaning the sets A and B are separated by a single uncovered point.

e-mail: oles.mazurenko@lnu.edu.ua

Affine composition operators

Zoriana Novosad
Lviv University of Trade and Economics, Lviv, Ukraine

The phenomen of hypercyclicity observed G. Birkhoff [1] over 90 years ago that the translation operator T on $H(\mathbb{C})$, given by $T(f)(z) = f(z+1)$ is hypercyclic on the space of entire functions on the complex plane $\mathbb{C}$. Later, after 20 years G. R. MacLane [2] proved that the differentiation operator $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$, $D(f) = f'$, $f \in H(\mathbb{C})$, is also hypercyclic.

Let X be a topological space. A continuous linear operator $T : X \to X$ is said to be *hypercyclic* if there is some vector $x \in X$ such that the set $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ of iterates of x is dense in X. The vector x is called a hypercyclic vector associated to the hypercyclic operator T.

We denote by $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ the algebra of all symmetric polynomials on ℓ_1. The next bases of $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ are useful for us: $(F_k)_{k=1}^{\infty}$, where $F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$.

Let $x, y \in \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ and $y = (y_1, y_2, \ldots)$. We put

$$x \bullet y := (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

We define the next operation $x \diamond y$ for x and y as the resulting sequence of ordering the set

$$\{x_i y_j : i, j \in \mathbb{N}\}$$

with one single index in some fixed order.

We will say that the map of the form $x \mapsto a \diamond x \bullet y = (a \diamond x) \bullet y$ is a *symmetric affine operator* on ℓ_1. Let us define the composition operator

$$\mathcal{Q}_y^a \colon H_{bs}(\ell_1) \to H_{bs}(\ell_1),$$

$$\mathcal{Q}_y^a(f)(x) := f(a \diamond x \bullet y),$$

where $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_1$, $a \neq 0$. We say that $\mathcal{Q}_y^a$ is a *symmetric affine composition operator.* Note that

$$F_k(a \diamond x \bullet y) = F_k(a)F_k(x) + F_k(y)$$

for every k.

Theorem 1. *Let $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_1$ such that all coordinates a_j are non-zero. The symmetric affine composition operator $\mathcal{Q}_y^a$ is hypercyclic on $H_{bs}(\ell_1)$ if and only if all $F_n(y) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $F_k(y) = 1$ for some $k \in \mathbb{N}$.*

This research was supported by the National Research Foundation of Ukraine, 2023.03/0198 "Analysis of the spectra of countably generated algebras of symmetric polynomials and possible applications in quantum mechanics and computer science".

References

[1] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[2] G.R. MacLane, Sequences of derivatives and normal families, *J. Analyse Math.* **2** (1952), 72–78.

e-mail: zoriana.maths@gmail.com

Inverse Sturm-Liouville problem of recovering the coefficients in boundary conditions

Viacheslav Pivovarchik, Alesia Supranovych
South Ukrainian National Pedagogical University, Ukraine

The history of inverse Sturm-Liouville problem is rather long. Such investigations were initiated by V. A. AmbarzΓjmian [1], who proved unique solvability of inverse problem of recovering the potential of the Sturm-Liouville equation in unperturbed case. It turned out that in general case one needs two spectra to find the potential of the Sturm-Liouville equation [2]. V. A. Marchenko solved the following problem: the spectra of two boundary value problems with the same potential and different boundary conditions are given, find the potencial.

We consider another kind of inverse problem in which the boundary conditions are to be found. Let the potential of the Sturm-Liouville equation be zero identically: Then

$$-y'' = \lambda^2 y, x \in [0,1]. \tag{1}$$

Here λ is the spectral parameter, $y(x)$ is an unknown function. We impose Robin's boundary conditions at both ends:

$$y(0) - b_1 y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y(1) - b_2 y(1) = 0, \tag{3}$$

where b_1 and b_2 are real numbers.

Our inverse problem is as follows: knowing the spectrum $\{\lambda_k\}$ of problem (1)–(3) find the coefficients b_1 and b_2. To solve this problem first of all we need to express the general solution of equation (1) in the following form

$$y = A\frac{\sin \lambda x}{\lambda} + B\cos \lambda x, \tag{4}$$

where A and B are unknown numbers. Substituting (4) into (2) we obtain $A = b_1 B$. Thus,

$$y = b_1 B\frac{\sin \lambda x}{\lambda} + B\cos \lambda x \tag{5}$$

We are looking for nontrivial solution what means $B \neq 0$. Therefore, substituting (5) into (3) we obtain the characteristic equation

$$\lambda \sin \lambda - (b_1 + b_2)\cos \lambda - b_1 b_2 \frac{\sin \lambda}{\lambda} = 0. \tag{6}$$

The zeros of the left-hand side of this equation are nothing but the eigenvalues of problem (1)–(3). The leading term of this equation is $\lambda \sin \lambda$. The zeros of this term are $\tilde{\lambda}_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Using Rouche's theorem we conclude that

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k + \Delta_k \tag{7}$$

where $\Delta_k \underset{k\to\infty}{=} o(1)$. Then substituting (7) into (6) we obtain

$$\Delta_k = \frac{b_1 + b_2}{\pi k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

and

$$b_1 + b_2 \underset{k\to\infty}{=} \pi k(\lambda_k - \pi k). \tag{8}$$

We look for the next term in the form

$$\Delta_k = \frac{b_1 + b_2}{\pi k} + \frac{\delta_k}{k}. \tag{9}$$

Using Rouche's theorem again we conclude that $\delta_k \underset{k\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Substituting (9) into (6) and keeping in mind (7) we arrive at

$$\lambda_k = \pi k + \frac{b_1+b_2}{\pi k} + \frac{b_1 b_2(b_1+b_2)}{\pi^3 k^3} - \frac{1}{3}\frac{(b_1+b_2)^3}{\pi^3 k^3} + o\left(\frac{1}{k^4}\right). \tag{10}$$

Equation (10) implies

$$b_1 b_2 = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi^3 k^3}{b_1+b_2}\left(\lambda_k - \pi k - \frac{b_k+b_2}{\pi k} + \frac{1}{3}\frac{(b_1+b_2)^3}{\pi^3 k^3}\right)\right). \tag{11}$$

Thus, by (8) and (11) we find b_1+b_2 and $b_1 b_2$ and, consequently, b_1 and b_2.

Acknowledgements

The authors express their gratitude to NSF US for the support of IMPRESS U project 7111 'Spectral and geometric methods for damped wave equations with applications to fiber lasers'.

References

[1] V. A. Ambarzumian. Über eine range der Eigenwerttheorie. Zeitschrift für Physik. 53, (1929), 690-695.

[2] V. A. Marchenko. Sturm-Liouville Operators and Applications. Birkhäuser, OT, 22, 1986.

e-mail: vpivovarchik@gmail.com, ghgufgchc@gmail.com

Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue measurable functions

Rostyslav Ponomariov, Taras Vasylyshyn

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let μ be the Lebesgue measure on $[0,1]$. Let $\Xi_{[0,1]}$ be the set of all bijections $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ such that, for every Lebesgue measurable set $E \subset [0,1]$, the sets $\sigma(E)$ and $\sigma^{-1}(E)$ are Lebesgue measurable and $\mu(\sigma(E)) = \mu(\sigma^{-1}(E)) = \mu(E)$.

Let $n \in \mathbb{N}$. For $j \in \{1, \ldots, n\}$, let $X_j([0,1])$ be some Banach space of functions $x : [0,1] \to \mathbb{C}$ such that $x \circ \sigma \in X_j([0,1])$ for every $x \in X_j([0,1])$ and $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Let $X_1([0,1]) \times \ldots \times X_n([0,1])$ be the Cartesian product of spaces $X_j([0,1])$. A function $f : X_1([0,1]) \times \ldots \times X_n([0,1]) \to \mathbb{C}$ is called $\Xi_{[0,1]}$-*symmetric* (or just *symmetric*) if

$$f((x_1 \circ \sigma, \ldots, x_n \circ \sigma)) = f((x_1, \ldots, x_n))$$

for every $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1([0,1]) \times \ldots \times X_n([0,1])$ and $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$.

We investigate symmetric polynomials and symmetric analytic functions on Cartesian products of spaces $L_\infty[0,1], L_p[0,1]$ and $L_p[0,+\infty)$, where $p \in [1,+\infty)$.

e-mail: taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua

On inverse problem for third order semilinear wave equation

Nataliia Protsakh, Halyna Ivasyuk, Tonia Fratavchan, Yurii Rubinskyy
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
Ukrainian National Forestry University, Lviv, Ukraine

We present the conditions for the existence and uniqueness of solutions in Sobolev spaces for the initial-boundary and the inverse coefficient problems for the semilinear hyperbolic equation with the strong damping in this work.

Many important physical phenomena such as propagation of sound in a viscous gas and other processes of the same nature could be described by the model hyperbolic equation of the third order, which contains a mixed derivative with respect to spatial and time variables

$$u_{tt} = \eta \Delta_x u_t + \Delta_x u, \tag{1}$$

where η is a positive constant, $\eta \Delta_x u_t$ is a low viscosity. We consider the direct and inverse problems for the equation that generalizes (1).

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, be a bounded domain with the smooth boundary $\partial\Omega$ and $0 < T < \infty$. Denote $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau), \tau \in (0, T]$.

We consider the following inverse problem: find the sufficient conditions for the existence of a pair of functions $(u(x,t), g(t))$ that satisfies the equation with strong damping

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_j} + \varphi_1(x,u) + \varphi_2(x,u_t) = f_1(x) g(t) + f_2(x,t),$$
$$x \in \Omega, \ t \in [0,T], \tag{2}$$

and the initial, boundary and overdetermination conditions

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \tag{4}$$

$$\int_\Omega K(x) u(x,t) dx = E(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Suppose that the data of the problem (2) – (5) satisfy the following conditions.

(H1) : $a_{ij}, \ b_{ij}, \ a_{ijt}, \ b_{ijt}, \ b_{ij,x_i} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$, and

$$\alpha_0 \|\xi\|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \le \alpha_1 \|\xi\|^2, \quad \beta_0 \|\xi\|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \le \beta_1 \|\xi\|^2,$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, almost all $x \in \Omega$, all $t \in [0,T]$, and $i, j = 1, ..., n$, where α_0, α_1 and β_0, β_1 are positive constants.

(H2) : functions $\varphi_1(x,\xi), \varphi_2(x,\xi)$ are measurable with respect to $x \in \Omega$ for all $\xi \in \mathbb{R}^1$ and continuously differentiable with respect to $\xi \in \mathbb{R}$. Moreover,

$$|\varphi_i(x,\xi)| \le L_{i,1} |\xi|, \quad |\varphi_i(x,\xi) - \varphi_i(x,\eta)| \le L_{i,0} |\xi - \eta|, \ i = 1,2,$$

$$(\varphi_2(x,\xi) - \varphi_2(x,\eta))(\xi - \eta) \ge 0$$

for almost all $x \in \Omega$ and $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, where $L_{i,0}, L_{i,1}$ are positive constants.

(H3) : $f_1 \in L^2(\Omega)$, $f_2 \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\ u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

(H4) : $E \in C^2([0,T])$, $\int_\Omega K(x) u_0(x) dx = E(0)$, $\int_\Omega K(x) u_1(x) dx = E'(0)$.

(H5) : $K \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Definition 1. *A pair of functions* $(u(x,t), g(t))$ *is a solution to the problem* (2) – (5), *if* $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^2(Q_T)$, $g \in C([0,T])$, *it satisfies* (5) *and*

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_{tt} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i t} v_{x_j} + \varphi_1(x,u) v + \varphi_2(x,u_t) v \Big)\, dx\, dt \\ &= \int\limits_{Q_\tau} \big(f_1(x) g(t) + f_2(x,t) \big) v \, dx\, dt\end{aligned} \tag{6}$$

holds for all functions $v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ *and* $\tau \in (0,T]$.

Theorem 1. *If* g *is given continuous function, the under the assumptions (H1)–(H3) and* $g \in L^2(0,T)$, $a_{ijt} \le 0$ *for all* $i,j = 1,2,\dots,n$, *the direct problem (2) – (4) admits a unique solution.*

Theorem 2. *Let* $\int\limits_{\Omega} K(x) f_1(x)\, dx \neq 0$, $a_{ijt} \le 0$ *for all* $i,j = 1,2,\dots,n$, *and the assumptions (H1) – (H5) hold. Then there exists a unique solution to the problem (2) – (5).*

e-mail: protsakh@ukr.net, h.ivasjuk@chnu.edu.ua, t.fratavchan@chnu.edu.ua, Yuriy.Rubinskyy@nltu.edu.ua

Superanalysis, invariant super-pseudodifferential operators and their application

Anatolij Prykarpatski, Oksana Hentosh
Lviv Polytechnic National University, Ukraine, and Cracow University of Technology, Poland
Institute for applied problems of mechanics and Mathematics at the NAS, Lviv, Ukraine

Past decades have seen the rapid development of a new branch of mathematics - superanalysis. Articles on the subject areeasilyrecognized, as nearly all the terms used bear the prefix "*super*". Some of the ideas embodied in "supermathematics"were discussed individually long ago, though mathematicians lacked the stimulus to study them in detail, and it has become clear that they are all parts of a single whole. Interest in supermathematics was originally aroused by its applications to modern mathematical and theoretical physics. Apparently, a unified theory of strong, weak, electromagnetic, and gravitational interactions can be constructed in the language of supermanifolds. For this subject and for the beautiful properties of the related supersymmetries, we refer to the surveys of [16], who effectively applied this supermathematics to the quantum string theory model in physics, and [6, 2], who presented a modern view on the functional superanalysis.

We live in a (4, 4)-dimensional superspace, whose underlying manifold is the ordinary 4-dimensional Minkowski space-time. The group of transformations of this superspace is a so called Lie supergroup whose points make up the Poincare group. This fundamental premise has a philosophical significance that transcends the confines of pure physics. The first mathematician to realize that he stood on the threshold of a new subject ("*supermathematics*") was undoubtedly Felix Berezin then an Israel Gelfand's student. Being concerned with questions of the second quantization of some functional expressions, he noticed [2, 3] the possibility of giving a parallel description of such elementary particles as bosons and fermions and, as early as the 1960 s, arrived at the conclusion that there is a non-trivial analogue in analysis, in which the role of functions is taken by elements of the Grassmann algebra.

It is high time we acknowledged that the prefix "*super*"was introduced by mathematically spirited physicists, who first designated (by the single word *super*!) some remarkable group and algevbras that reshuffled the elementary particles of different statistics. Then they realized the action of these supergroups and superalgebras on "superspaces and this terminology later spread through the whole subject. Note that in some contemporary articles such symmetry structures as Lie superalgebras are called graded Lie algebras.

In work with superobjects, consistency in choice of signs plays a special role. To avoid errors, we must keep in mind the following rule by Quillen [12] : when something of parity p moves past something of parity q, the sign $(-1)^{pq}$ appears.

In our report there will be considered a problem of describing invariant super-pseudodifferential operators and presented some their applications. In particular, owing to the interesting observation in the work [5], based on the affine Sturm-Liouville type superconformal spectral problem $(D_{\theta_1}D_{\theta_2} + \sum_{j=-m}^{m+p-1} u_j(x,\theta)\lambda^j + \lambda^{m+p})f(x,\theta) = 0,\ m,p \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}$, on the supercircle $\mathbb{S}^{1|2} \simeq \{(x,\theta) \in \mathbb{S}^1 \times \Lambda_1^{(2)}\}$ for $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{1|2};\Lambda_0^{(2)})$ the special reductions of the related nonlinear integrable superconformal evolution flows prove to be supersymmetric dynamical systems on functional supermanifolds. Another interesting Backlund type construction of nonlinear $N = 2-$ superconformal semi-supersymmetric dynamical systems was suggested in [5], generalizing in part those obtained before in [9].

Within our Report we will demonstrate a successful application of modern Lie algebraic approaches, lying in the background of effective constructions of integrable in general semi-supersymmetric Hamiltonian systems on functional $N \geq 2-$ supermanifolds, possessing rich yet hidden super-symmetries and endowed with suitably related super-Poisson structures. As an application, we describe countable hierarchies of new Lax type integrable nonlinear $N = 3-$ semi-supersymmetric dynamical systems. In particular, we analyze the suitably central extended super-conformal affine Lie superalgebra $\hat{\mathcal{K}}(1|3)$ and its finite-dimensional coadjoint orbits, generated by the related Casimir functionals on the super-coalgebra $\hat{\mathcal{K}}(1|3)^*$, and construct an infinite hierarchy of completely integrable super-Hamiltonian systems on smooth functional supermanifolds, which also prove to be supersymmetric. Moreover, we generalized these results subject to the suitably factorized super-pseudodifferential Lax type representations, taking into account the devised before algebro-analytic constructions both in mentioned above works [5, 9] and in devoted to Lie algebraic properties of factorized Lax type representations [14] and the respectively factorized Hamiltonian systems. As a new interesting result, we succeed in algorithmic construction of integrable super-Hamiltonian factorized systems, generated by Casimir invariants of centrally extended pseudo-differential operator superalgerbras.

References

[1] Agrebaoui B., Hattab R., 1-cocycles on the group of contactomorphisms on the supercircle $\mathbb{S}^{1,3}$ generalizing the Schwarzian derivative. Czechoslovak Mathematical Journal, 66(4) (2016), 1143–1163

[2] Berezin F.A ., Introduction to Superanalysis, (ed. by A.A. Kirillov), D. Reidel Publ. Company, 1987.

[3] Berezin F.A., The method of second quantization, Pure & Applied Physics 24, Academic Press, New York-London, 1966.

[4] Hentosh O.E., Compatibly bi-Hamiltonian superconformal analogs of Lax-integrable nonlinear dynamical systems. Ukrainian Mathematical Journal, 58(7) 2006, 1001-1015.

[5] Hentosh O.E., The Lax integrable Laberge–Mathieu hierarchy of supersymmetric nonlinear dynamical systems and its finite-dimensional Neumann type reduction. Ukrainian Math. J. 61(7) (2009), 1075–1092; https://doi.org/10.1007/s11253-009-0260-7.

[6] Inoue Atsushi, Lectures on Super Analysis - Why necessary and What's that? Towards a new approach to a system of PDEs. arXiv:1504.03049v4 [math-ph] 15 Dec 2015

[7] Kulish P.P., Analog of the Korteweg–de Vries equation for the superconformal algebra. J. Soviet Math. 41(2), (1988), 970–975

[8] Kupershmidt B.A., Integrable systems,"Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 81 (1984), 6562-6563.

[9] Laberge C.-A., Mathieu P., $N = 2$ superconformal algebra and integrable O(2) fermionic extensions of the Korteweg – de Vries equation, Phys. Lett. B. 215(4) 1988, 718 – 722.

[10] Leites D., Introduction to supermanifolds, Russian Math. Surveys 35(1) (1980), 1-64

[11] Popowicz Z., $N = 2$ Super-complexification of the Korteweg-de Vries, Sawada-Kotera and Kaup-Kupershmidt Equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 26(2) (2019), 294-312; https://doi.org/10.1080/14029251.2019.1591732

[12] Guillen D., Homotopical Algebra, Texromancers, 2022

[13] Volkov D.V. and Akulov V.P., Is the neutrino a Goldstone particle?, Phys. Lett. 46B (1973), 109-110.

[14] Vovk M., Pukach, Hentosh O., Prykarpatsky Ya., The structure of rationally factorized Lax type fows and their analytical integrability. WSEAS Transactions on Mathematics, 16 (2017), 323-330

[15] Wess J. and Zumino B., Super-gauge transformations in four dimensions, Nucl. Phys. B70 (1974) 39-50.

[16] Witten E., Supersymmetry and Morse theory, J.Diff.Geom.17(1982), pp. 661-692.

[17] Yamanaka I., Sasaki R., Super Virasoro Algebra and Solvable Supersymmetric Quantum Field Theories. Progress of Theoretical Physics, 79(5) 1988, 1167-1184

e-mail: pryk.anat@cybergal.com, ohen@ukr.net

Connection of the Pappus and Desarguesian affine planes

Vladyslav Pshyk

Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine

In this talk we will show that every Pappian Affine plane is Desarguesian.

First time this results has been obtained with some inaccuracy by Hessenberg in 1905 in his work [1]. In the 1953 Arno Cronheim has completed proof for projective plane in [2]. At the same time, a proof for the affine plane still was not finished. We will present complete proof for the affine plane.

References

[1] Hessenberg, Gerhard. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. (German) Math. Ann. 61 (1905), no. 2, 161–172.

[2] Cronheim, Arno. A proof of Hessenberg's theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 219–221

e-mail: vladyslav.pshyk@lnu.edu.ua

Best approximations for the combination of Cauchy–Szegö kernels in the mean

Maryna Savchuk, Viktor Savchuk

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute Kyiv, Ukraine

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The Causchy–Szegö kernel is the function

$$C(t, z) := \frac{1}{1 - t\overline{z}}$$

defined on $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$, where $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ and $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{D} : |z| < 1\}$. By the combination of Cauchy–Szegö kernels we mean the function

$$C_{n,z,\lambda}(t) := t^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overline{z}} C(t, z) + \lambda C(t, z), \ t \in \mathbb{T},$$

where $n \in \mathbb{Z}_+$ and $\lambda \in \mathbb{C}$.

Denote $H_0^1 = \{h \in H^1 : h(0) = 0\}$, where H^1 is the Hardy space in the disk $\mathbb{D}$.

In the present talk, we give an explisit form of

$$e_{n,z}(\lambda) := \inf \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \overline{C_{n,z,\lambda}} + h \right| |dt| : h \in H_0^1 \right\},$$

as a function of $\lambda \in \mathbb{C}$ and discribe the corresponding extremal functions h for which the infimum is attained.

Theorem 1. *Let $z \in \mathbb{D}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$. Then*

$$e_{n,z}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - |z|^2} + \dfrac{|\lambda|^2 (1 - |z|^2)}{4}, & \text{if} \quad 0 \leq |\lambda| \leq \dfrac{2}{1 - |z|^2}, \\ |\lambda|, & \text{if} \quad |\lambda| \geq \dfrac{2}{1 - |z|^2}, \end{cases} \tag{1}$$

The extremal function is only

$$h(t) = \frac{\lambda t \overline{z}}{1 - t\overline{z}} + \beta^2 \frac{t^{n+1}}{(1 - t\overline{z})^2}, \tag{2}$$

where

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{\lambda(1 - |z|^2)}{2}, & \text{if} \quad |\lambda| \leq \dfrac{2}{1 - |z|^2}, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg \lambda}, & \text{if} \quad |\lambda| \geq \dfrac{2}{1 - |z|^2}. \end{cases}$$

e-mail: maryna1savchuk@gmail.com, savchuk@imath.kiev.ua

Approximation by interpolation trigonometric polynomials on the sets of convolutions

Anatoly Serdyuk, Tetiana Stepaniuk
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Let $\psi(k)$ be an arbitrary fixed sequence of real nonnegative numbers and let β be a fixed real number.

Denote by $C^{\psi}_{\beta}L_1$ the set of 2π–periodic functions, which for all $x \in \mathbb{R}$ can be represented as convolutions of the form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ \varphi \in L_1, \ \varphi \perp 1 \tag{1}$$

with the generating kernel Ψ_{β} of the form

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big), \ \psi(k) \geq 0, \ \beta \in \mathbb{R},$$

such that $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$.

The function φ in equality (1) is called as (ψ,β)–derivative of the function f and is denoted by f^{ψ}_{β} $(\varphi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot))$ [1].

The subset of functions f from $C^{\psi}_{\beta}L_1$, such that $f^{\psi}_{\beta} \in B_1$, where B_1 is a unit ball of the space C– L_1, namely $B_1 := \{\varphi : \ ||\varphi||_1 \leq 1\}$, we denote by $C^{\psi}_{\beta,1}$.

We study approximation properties of the sets $C^{\psi}_{\beta}L_1$ and $C^{\psi}_{\beta,1}$, where we use as approximation aggregate the classical interpolation trigonometric Lagrange polynomials, which are defined by odd number of uniformly distributed interpolation nodes.

For arbitrary function $f(x)$ from C by $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$, $n \in \mathbb{N}$, we will denote the trigonometric polynomial of the order $n-1$, which interpolates $f(x)$ in the nodes $x^{(n-1)}_k = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, namely, such that

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x^{(n-1)}_k) = f(x^{(n-1)}_k), \ k = 0, 1, ..., 2n-2.$$

Let $\mathcal{T}_{2n-1}$ be the space of all trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ and let $E_n(f)_{L_1}$ be the best approximation of the function $f \in L_1$ in the metric of space L_1, by the trigonometric polynomials t_{n-1} of degree $n-1$, i.e.,

$$E_n(f)_{L_1} = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_{L_1}.$$

Denote by $\tilde{\rho}_n(f;\cdot)$ the deviation of the function $f \in C$ from its interpolation Lagrange polynomial $\tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x).$$

Our aim is to establish the interpolation analogues of the Lebesgue type inequalities for the functions from the sets $C^{\psi}_{\beta}L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, where the upper estimates of the quantities $|\tilde{\rho}_n(f;x)|$, $x \in \mathbb{R}$, are expressed via the best approximations $E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$.

The following theorem takes place.

Theorem 1. *Let* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, ...$, $\beta \in \mathbb{R}$ *and* $n \in \mathbb{N}$. *Then, for all* $x \in \mathbb{R}$ *and arbitrary function* $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$ *the following inequality takes place*

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \leq \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}.$$

Moreover, for the function $f \in C^{\psi}_{\beta} L_1$ one can find the function $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ such, that $E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$, for which the following equality takes place:

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\psi(k+n)}{n} \right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \quad (1)$$

In (1) the quantity $\xi = \xi(f; n; \psi; \beta; x)$ is such that $-\left(2 + \frac{1}{\pi}\right) \leq \xi \leq \frac{1}{\pi}$.

Theorem 2. *Let $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, ...$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then, for all $x \in \mathbb{R}$ the following equality holds*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\Theta}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right). \quad (2)$$

In (2) the quantity $\Theta = \Theta(n; \psi; \beta; x)$ is such that $-(1+\pi) \leq \Theta \leq 1$.

It should be noticed that the estimates (2) will be the asymptotic equality as $n \to \infty$, if the following condition takes place

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi(k)} = 0. \quad (3)$$

The condition (3) holds in the row of many important cases, namely, when the sequence $\psi(k)$ decreases to zero faster as arbitrary power sequence $\frac{1}{k^r}$, $r > 1$, as $k \to \infty$.

These results were published in [2].

Acknowledgment. This work is partially supported by the Grant H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology) and by the grant from the Simons Foundation (1290607, AS).

References

[1] A.I. Stepanets, *Methods of Approximation Theory* VSP: Leiden, Boston 2005.

[2] Serdyuk A. S., Stepanyuk T. A., Estimates of approximations by interpolation trigonometric polynomials on classes of convolutions of periodic functions of high smoothness, Journal of Mathematical Sciences. (2024), **211** (1), 111–136.

e-mail: sanatolii@ukr.net, stepaniuk.tet@gmail.com

A PARAMETRIC DESCRIPTION GENERAL LINEAR GROUP OF DEGREE 3 OVER A FIELD

Volodymyr Shchedryk
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, L'viv, Ukraine
shchedrykv@ukr.net

We consider the problem of representing general linear group of degree 3 over a field F as a product of centralizer of the matrix $J := \mathrm{diag}(0,0,1)$ in the group $\mathrm{GL}_3(F)$ (in notation $C_{\mathrm{GL}_3(F)}(J)$) and the set representatives of right cosets of this group (in notation $K(J)$).

Theorem 1.

$$\mathrm{GL}_3(F) = C_{\mathrm{GL}_3(F)}(J)K(J),$$

where

$$C_{\mathrm{GL}_3(F)}(J) = \mathrm{GL}_2(F) \bigoplus F\backslash\{0\};$$
$$\mathrm{GL}_2(F) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & m \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

where $a, c, m \in F\backslash\{0\}, b, n \in F$; $K(J)$ *consists of matrices of the form*

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b+c & d & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ d & b+c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ n & m & -1 \\ n & m & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ n & m & -1 \\ n & m & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & -1 \\ n & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} n & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ m & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where $a, c, d, n \in F$, $b, m \in F\backslash\{0\}$.

Theorem 2. *All idempotent matrices from* $M_3(F)$ *with the Smith form* $\mathrm{diag}(1, x, x(x-1))$ *of its characteristic matrices are the following:*

$$b^{-1} \begin{bmatrix} b+c & d & 1 \\ -(b+c)a & -da & -a \\ (b+c)(da-c) & d(da-c) & da-c \end{bmatrix},$$

$$b^{-1} \begin{bmatrix} (b+c) & 1 & 0 \\ -(b+c)c & -c & 0 \\ -(b+c)a & -a & 0 \end{bmatrix}, \quad b^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & b+c & 1 \\ -dc & -(b+c)c & -c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ nm & n & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where $a, c, d, m, n \in F$, $b \in F\backslash\{0\}$.

e-mail: shchedrykv@ukr.net

σ-MONOGENIC FUNCTIONS IN COMMUTATIVE ALGEBRAS

Vitalii Shpakivskyi
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Let $\mathbb{A}$ be an arbitrary n-dimensional $(1 \leq n < \infty)$ commutative associative algebra with unit over the field of complex number $\mathbb{C}$. E. Cartan proved that in $\mathbb{A}$ there exist a basis $\{I_k\}_{k=1}^n$ such that the first m basis vectors $I_1, I_2, \dots, I_m$ are idempotents and another vectors $I_{m+1}, I_{m+2}, \dots, I_n$ are nilpotents. The element $1 = I_1 + I_2 + \dots + I_m$ is the unit of $\mathbb{A}$.

In the algebra $\mathbb{A}$ we consider the vectors $e_1, e_2, \dots, e_d$, $2 \leq d \leq 2n$. Let these vectors have the following decomposition in the basis of the algebra:

$$e_j = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} \, I_r \,, \quad a_{jr} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots, d. \tag{1}$$

Throughout this paper, we will assume that at least one of the vectors $e_1, e_2, \dots, e_d$ is invertible. This condition ensures the uniqueness of the σ-derivative.

For the element $\zeta = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d$, where $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}$, the complex numbers

$$\xi_u := x_1 a_{1u} + x_2 a_{2u} + \dots + x_d a_{du}, \qquad u = 1, 2, \dots, m$$

forms the spectrum of the point ζ.

Consider in the algebra $\mathbb{A}$ a linear span

$$E_d := \{\zeta = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d : \; x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}$$

generated by the vectors $e_1, e_2, \dots, e_d$ of $\mathbb{A}$.

Next, the assumption is essential: for each fixed $u \in \{1, 2, \dots, m\}$ at least one of the numbers $a_{1u}, a_{2u}, \dots, a_{du}$ belongs to $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

We identify a domain Ω in the space $\mathbb{R}^d$ with the domain

$$\Omega := \{\zeta = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in S\} \text{ in } E_d \subset \mathbb{A}.$$

Definition 1 [1]. *We will call the continuous function $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ monogenic in the domain $\Omega \subset E_d$ if Φ is differentiable in the sense of Gâteaux at every point of this domain, that is, if for each $\zeta \in \Omega$ there exists an element $\Phi'(\zeta)$ of the algebra $\mathbb{A}$ such that the equality*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h \Phi'(\zeta) \quad \forall \, h \in E_d \tag{2}$$

holds. $\Phi'(\zeta)$ is called the Gâteaux derivative of the function Φ at the point ζ.

The theory of monogenic functions in commutative algebras is well developed in the works of the author and his colleagues S. A. Plaksa, S. V. Gryshchuk and R. P. Pukhtaievych. Monogenic functions are some analog of analytic functions in commutative algebras.

At the end of book [2], V. Kravchenko poses 5 open problems. In the fourth problem, Kravchenko points out the need to construct a pseudoanalytic function theory in multidimensional case.

Our work is an attempt to solve the Kravchenko problem in the case of any finite-dimensional commutative associative algebra. Namely, by developing the ideas of L. Bers and G. Polozhii, σ-monogenic functions will be introduce in any commutative associative algebra.

Let a function $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ be of the form

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x_1, x_2, \dots, x_d) \, I_k \,. \tag{3}$$

Let σ be a collection of n $\mathbb{A}$-valued functions:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

where $\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sigma_k(\zeta)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, is a function in $\mathbb{A}$.

For a vector $h = \sum\limits_{j=1}^{d} h_j e_j$, $h_j \in \mathbb{R}$, we denote

$$\Delta_{\varepsilon,h,\sigma}\Phi(\zeta) := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\zeta)\Big(U_k(x_1 + \varepsilon h_1, \ldots, x_d + \varepsilon h_d) - U_k(x_1, \ldots, x_d)\Big)\, I_k\,.$$

Definition 2 *We will call the continuous function $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ σ-monogenic in the domain $\Omega \subset E_d$ if for each $\zeta \in \Omega$ there exists an element $\Phi'_\sigma(\zeta)$ of the algebra $\mathbb{A}$ such that for every $h \in E_d$ the equality*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Delta_{\varepsilon,h,\sigma}\Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\, \Phi'_\sigma(\zeta) \tag{4}$$

holds. $\Phi'_\sigma(\zeta)$ is called σ-derivative of the function Φ at the point ζ.

Remark 1. If for all $k = 1, 2, \ldots, n$ $\sigma_k \equiv 1$, then definition 2 coincides with definition 1, i. e. 1-monogenic function is monogenic.

Remark 2. If $\mathbb{A} \equiv \mathbb{C}$ and for special choice of σ_1, σ_2 the definition (4) coincides with the definition of pseudoanalytic function in the sense of Bers.

Necessary and sufficient conditions for σ-monogeneity have been established. In some low-dimensional algebras, with a special choice of σ, the representation of σ-monogenic functions is obtained using holomorphic functions of a complex variable. We proposed the application of σ-monogenic functions with values in two-dimensional biharmonic algebra to representation of solutions of two-dimensional biharmonic equation. The announced results are published in the paper [3].

References

[1] Mel'nichenko I. P. The representation of harmonic mappings by monogenic functions. Ukr. Math. J., 1975, Vol. 27, no. 5, 499–505.

[2] Kravchenko V. V. Applied pseudoanalytic function theory. Birkhäuser, Series: Frontiers in Mathematics, Basel, 2008.

[3] Shpakivskyi V. S. σ-monogenic functions in commutative algebras. Proceedings of the International Geometry Center, 2023, Vol. 16, no. 1, 17–41.

e-mail: shpakivskyi86@gmail.com

Euler-Mascheroni constant for increasing functions

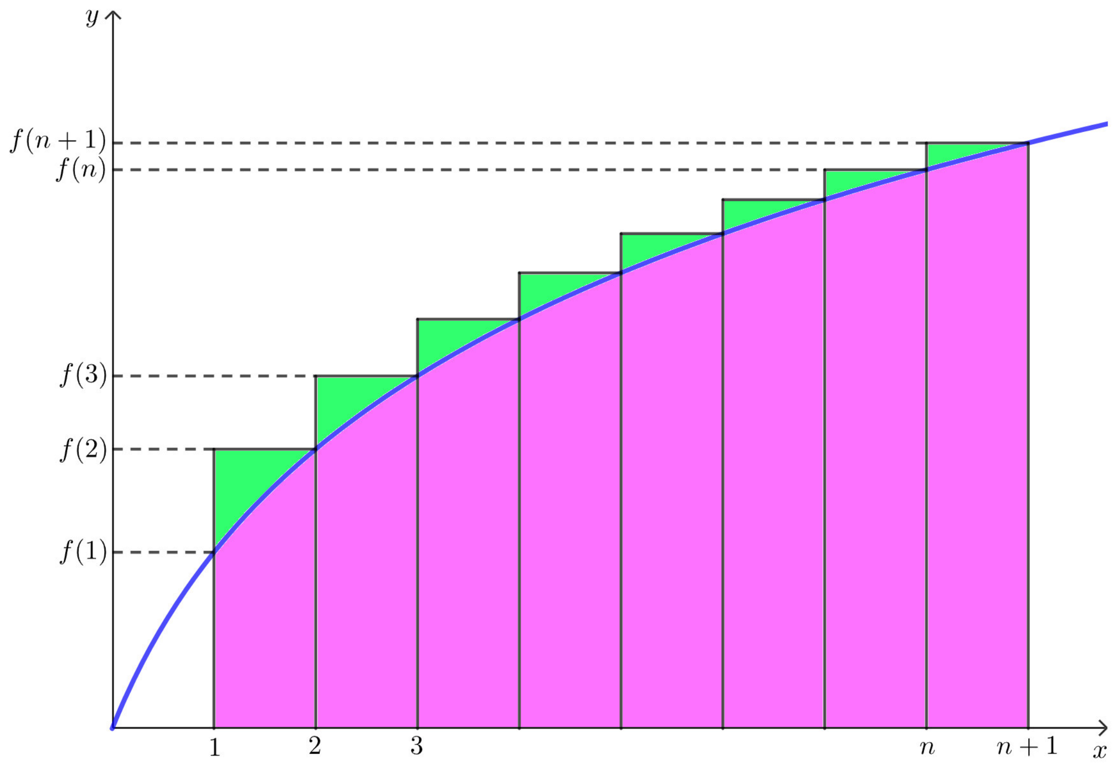
Kateryna Smortsova, Serhii Gefter
V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

Let $f : [1; +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ be a non-negative increasing continuous function such that $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Definition 1. *Let us call the sum of the following series by Euler-Mascheroni constant of the function f:*

$$\gamma_f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1) - \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx \right).$$

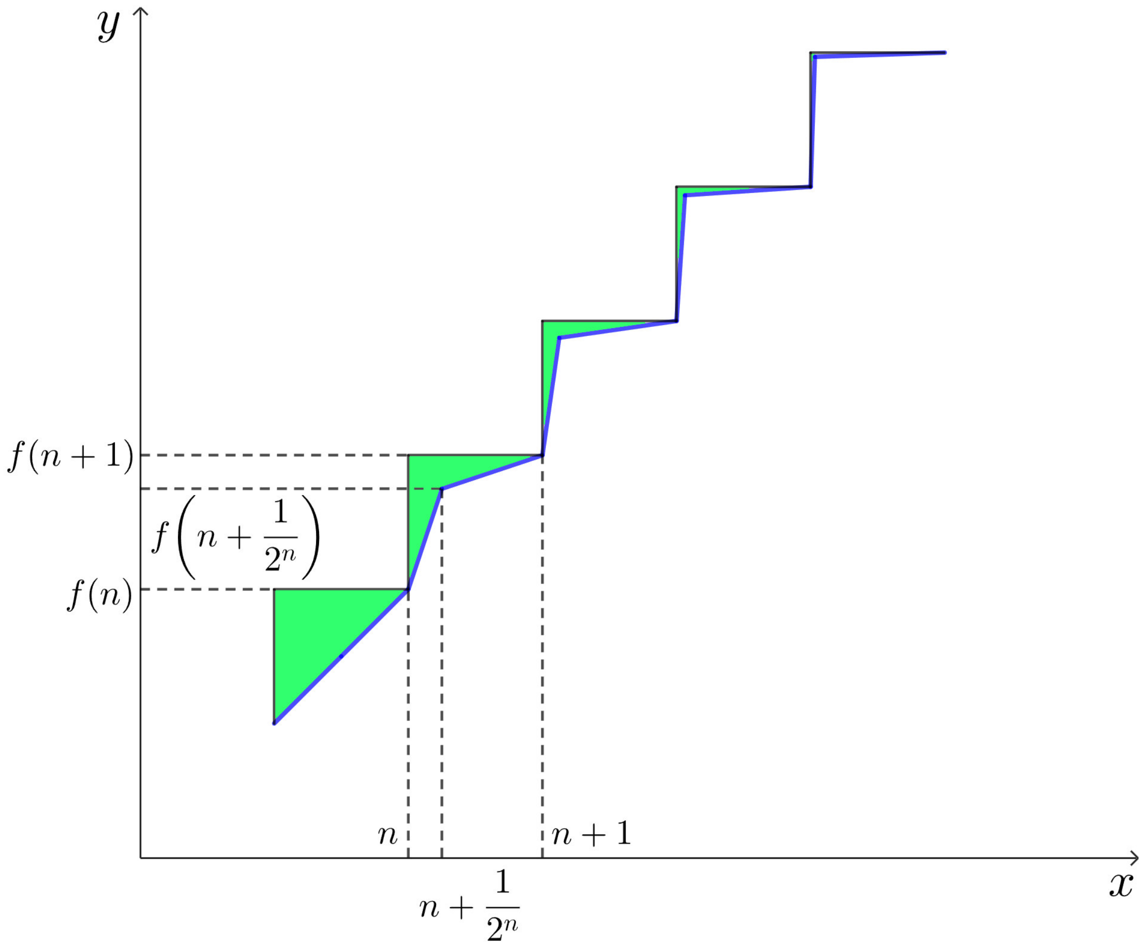
Geometrically, it is the sum of the areas of green curvilinear triangles:



There are unboundedly increasing functions with finite Euler-Mascheroni constant. For instance, the function

$$f(x) = \begin{cases} n + (2^n - 1)(x - n), & x \in \left[n; n + \frac{1}{2^n}\right), \\ n + \frac{2^n-1}{2^n} + \frac{x-n-\frac{1}{2^n}}{2^n-1}, & x \in \left[n + \frac{1}{2^n}; n+1\right) \end{cases}$$

has one equaling to $\frac{3}{4}$ (see fig. below).



Theorem 1. *Let* $f : [1; +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *be a non-negative increasing continuously differentiable concave function such that* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Then* $\gamma_f = +\infty$.

The proof is based on a certain version of Euler-Maclaurin summation formula.

This work was supported by the Akhiezer Foundation.

e-mail: kateryna.smortsova@student.karazin.ua, gefter@karazin.ua

Return condition for an Arbitrary Linear Systems of the Second Order

Tetyana Smortsova

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

Consider the system of the form [1]

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r. \tag{1}$$

Definition 1. [1] For system (1) the return condition on the interval $I = [T^*,\ T^* + a]$, $a > 0$, $T^* \geq 0$, is satisfied, if for any $T \in I$ there exists an admissible control $u_T(t)$ such that the solution of the Cauchy problem $\dot{x} = Ax + \varphi(u_T(t)),\ x(0) = 0$ satisfies the condition $x(T) = 0$.

For an arbitrary linear system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r.$$

the return condition takes the form

$$\int_0^T e^{-At} b u_T(t) dt = 0.$$

Let us consider the return condition for a linear system of the second order of the form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u \end{cases}, \qquad |u| \leq c. \tag{2}$$

The goal is to find piece-wise controls that return the origin by virtue of this system at any time T. In other words, the switch points of such controls should be identified.

The solution of the problem stated depends on eigenvalues of matrix A and on the number of switch points of controls considered.

It is natural that the unique solution of the problem exists for the case of two switch points only, i.e. for controls of the form

$$u(t) = \begin{cases} -c, & t \in [0,\ t_1) \cup [t_2,\ T] \\ c, & t \in [t_1,\ t_2), \end{cases}, \quad 0 < t_1 < t_2 < T.$$

There is no control with a single switch point that returns the origing by virtue of system (2). On the other hand, there are families of controls with three switch points and more.

Based on the eigenvalues of the matrix, four essentially different cases should be distinguished.

1. The matrix has 0 eigenvalue.

2a. The matrix has different real eigenvalues.

2b. The matrix has equal real eigenvalues.

2c. The matrix has different complex eigenvalues.

For different cases, algebraic systems to find switch points were obtained. The solutions of those systems were found using Wolfram Mathematica.

Below, the results for the following system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + u \end{cases}, \qquad |u| \leq 1.$$

are presented. Namely,

for $T = 1.1$: switch points are $t_1 \approx 0.221484$, $t_2 \approx 0.810935$, end point is $x_1(1.1) \approx -2.28855 \cdot 10^{-10}$, $x_2(1.1) \approx -5.42602 \cdot 10^{-10}$;

for $T = 2$: switch points are $t_1 \approx 0.309015$, $t_2 \approx 1.51658$, end point is $x_1(1) \approx -2.147652 \cdot 10^{-9}$, $x_2(1) \approx 4.426365 \cdot 10^{-9}$.

On the figures, the graphics of coordinates of the system and its trajectories are shown.

1. Korobov, V. I. Geometric Criterion for Controllability Under Arbitrary Constraints on the Control, J. of Optim. Theory and Applications, 2007, Vol. 134, pp. 161–176.

e-mail: t.smortsova@karazin.ua

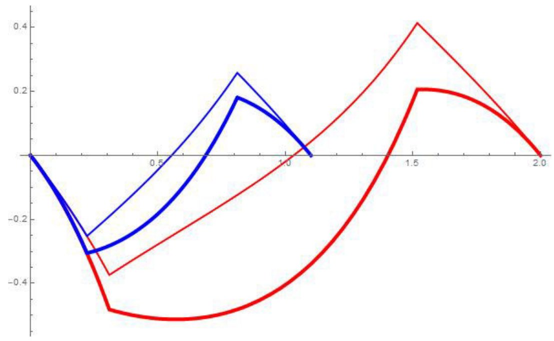


Рис. 1: Graphics of coordinates

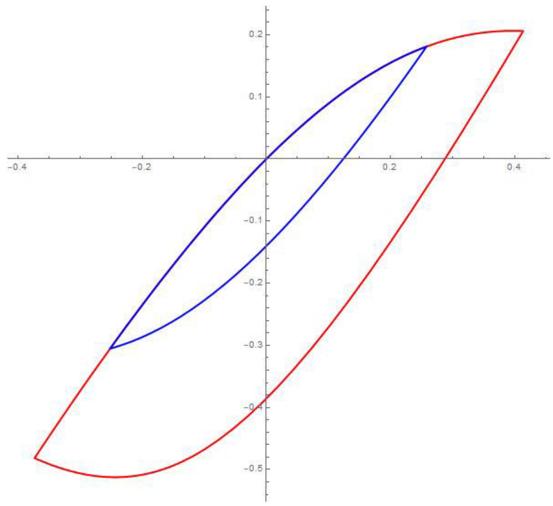


Рис. 2: System trajectories

On the interrelation between solutions of boundary value problems on sets of fixed and variable structure

Olexandr Stanzhytskyi, Roza Uteshova, Zoia Khaletska

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Volodymyr Vinnichenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine

Let $\mathbb{T}$ be an arbitrary nonempty closed subset of the real axis, which is called a time scale. Hilger [1] introduced the concept of a derivative on such sets, referred to as the Δ-derivative.

Definition. *Let $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. The Δ-derivative of the function f at a point $t \in \mathbb{T}$ is the limit*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma - t},$$

if it exists. Here $\sigma(t) = \inf\{s > t,\ s, t \in \mathbb{T}\}$.

We consider a family of time scales $\mathbb{T}_\lambda$ (a set of variable structure) such that $[0,1] \cap \mathbb{T}_\lambda = [0,1]_\lambda \to [0,1]$, $\lambda \to 0$, for instance, in the Hausdorff metric. Here $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^1$, and 0 is in accumulation point of this set. In this case, $[0,1]$ is regarded as a set of fixed structure. On the sets $[0,1]_\lambda$, we consider the family of boundary value problems

$$\begin{aligned} x^{\Delta} &= f(t,x), \\ F(x(0), x(1)) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

It is assumed that $0, 1 \in [0,1]_\lambda$ for all λ. We also consider the asymptotic boundary value problem

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= f(t,x), \\ F(x(0), x(1)) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

for a system of ordinary differential equations. Here $f : [0,1] \times D \to \mathbb{R}^d$, D is a domain in $\mathbb{R}^d$, $F : D \times D \to \mathbb{R}^d$.

Let $x_\lambda(t)$ denote a solution of problem (1) on $[0,1]_\lambda$, and let $x(t)$ be a solution of problem (2) on $[0,1]$. We assume that the functions f and F are continuously differentiable in their domains. The following statement on the interrelation between the solutions of problems (1) and (2) holds true.

Theorem. *Let problem (2) have an isolated solution $x_\lambda(t)$ (i.e., there exists a neighborhood of $x_\lambda(t)$ where no other solutions of problem (2) exist). Then, there exists λ_0 such that for*

$0 < \lambda \leq \lambda_0$ *the boundary value problem (1) has a unique isolated solution. Moreover,*

$$\sup_{t \in [0,1]_\lambda} |x_\lambda(t) - x(t)| \to 0, \quad \lambda \to 0. \tag{3}$$

The converse result is also true: if there exists λ_0 such that for all $\lambda \in (0, \lambda_0]$, the boundary value problem (1) has a unique isolated solution, then problem (2) also has a unique isolated solution, and the relation (3) holds as well.

Both statements are proved using Banach's fixed-point theorem for a certain mapping, which is a contraction mapping for sufficiently small λ.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant No. AP23485618).

References

[1] Hilger S. Ein MaГџkettenkalkГјl mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. PhD, UniversitГ¤t WГјrzburg, WГјrzburg, Germany, 1988.

e-mail: ostanzh@gmail.com, r.uteshova@math.kz, khaletskazoya@gmail.com

Outgoing null gravitational and neutrino field equations

Yurii Taistra, Volodymyr Pelykh

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

Neutrino field on an astrophysical scale can be strong enough, and within the framework of the general theory of relativity it can affect the curvature of space-time. In this case, the right-hand side of Einstein's equations becomes the energy-momentum tensor of neutrino field, and thus neutrino and gravitational fields form a connected system of differential equations. We consider such a system of equations in the case of outgoing null gravitational field, where the energy-mometum tensor is defined by outgoing neutrino field, and obtain conditions on the Newman-Penrose scalars, that describes space-times where such fields are admitted. Such model may describe gravitational waves induced by strong neutrino field.

Literature

1. V. O. Pelykh, Y. V. Taistra Ukr. Journ. of Phys. **62**, 11 (2017)
2. C. D. Collinson, P. B. Morris Int. Journ. of Theor. Phys. **5**, (1971)

e-mail: ythelloworld@gmail.com

Existence and asymptotic behaviour of solutions for a fractional thin-film equation in multi-dimensional domains

Roman Taranets

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Sloviansk, Ukraine

We consider a degenerate nonlocal parabolic equation in a multi-dimensional domain introduced to model hydraulic fractures, where the nonlocal operator is given by a fractional power of the Laplacian, and the degenerate mobility exponent corresponds to "strong slippage" regime with "complete wetting" interfacial conditions for local thin-film equations. We prove existence of weak solutions to a family of fractional thin-film equations in a bounded domain. Also, using a localized entropy estimate and a Stampacchia-type lemma, we establish a finite speed of propagation result and sufficient conditions for the waiting-time phenomenon. This is joint work with Antonio Segatti and Stefano Lisini (Università di Pavia, Pavia, Italy), Nicola de Nitti (École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland).

This research was supported by NRFU project No. 2023.03/0074 "Infinite-dimensional evolutionary equations with multivalued and stochastic dynamics".

e-mail: taranets_r@yahoo.com

On Choosing the Initial Approximation for a Boundary Value Problem with Impulsive Action

Svetlana Temesheva, Sansyzbai Ashirov
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

We considered a boundary value problem with impulsive action

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in (t_1, t_2) \setminus \{t_0\}, \tag{1}$$

$$x(t_0+0) - x(t_0-0) = p, \tag{2}$$

$$g(x(t_1), x(t_2)) = 0, \tag{3}$$

where $x \in R^n$, $f : ((t_1,t_2)\setminus\{t_0\}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ are continuous, $t_1 < t_0 < t_2$, and p is a given constant n-vector.

The difficulties encountered in studying nonlinear boundary value problems are related to the need to consider the behavior of the functions f and g within the chosen sets. Depending on the selected set where the solution of the problem is sought, these functions exhibit different properties. Therefore, the choice of the initial approximation is critically important in constructing approximate solutions for nonlinear boundary value problems for differential equations. A well-chosen initial approximation greatly influences the convergence of the iterative process and the accuracy of the resulting solution. In complex nonlinear problems, a proper initial approximation can significantly speed up the solution process or even ensure its existence. Without a careful selection of the initial approximation, numerical methods may face substantial difficulties, making this issue central to the study and resolution of nonlinear boundary value problems.

Using the solution $(\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$ of the nonlinear operator equation

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda_1 - \displaystyle\int_{\frac{t_1+t_0}{2}}^{t_1} f(t,\lambda_1)dt \\ p + \lambda_1 + \displaystyle\int_{\frac{t_1+t_0}{2}}^{t_0} f(t,\lambda_1)dt - \lambda_2 - \displaystyle\int_{\frac{t_2+t_0}{2}}^{t_0} f(t,\lambda_2)dt \\ \lambda_2 + \displaystyle\int_{\frac{t_2+t_0}{2}}^{t_2} f(t,\lambda_2)dt - \lambda_3 \\ g(\lambda_0,\lambda_3) \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

we will construct the piecewise continuous function

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_0^{(0)} & \text{if} \quad t = t_1, \\ \lambda_1^{(0)} + \displaystyle\int_{\frac{t_1+t_0}{2}}^{t} f(\tau, \lambda_1^{(0)})d\tau & \text{if} \quad t \in (t_1, t_0), \\ \lambda_2^{(0)} + \displaystyle\int_{\frac{t_2+t_0}{2}}^{t} f(\tau, \lambda_2^{(0)})d\tau & \text{if} \quad t \in (t_0, t_2), \\ \lambda_3^{(0)} & \text{if} \quad t = t_2. \end{cases} \tag{5}$$

Conditions for the existence of an isolated solution of the equation (4) within a certain sphere have been obtained. Thus, one of the methods for choosing the initial approximation $x^{(0)}(t)$ of the solution to problem (1)-(3) has been proposed.

Thus, the application of the idea of the Dzhumabaev parametrization method [1] and iterative methods for unbounded operator equations [2] allows us to find the values of the initial approximation using the initial data from problems (1)-(3).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No AP23488811).

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Comput. Maths. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations, *Mathematical Notes*, **41**:5 (1987), 356вЂ“-361 .

e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com, temesheva.svetlana@kaznu.kz, ashirov_27@mail.ru

On weakly block-symmetric functions on the space of absolutely summing sequences

Mykhailo Varvariuk, Taras Vasylyshyn

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let ℓ_1 be the complex Banach space of all absolutely summing sequences of complex numbers $x = (x_1, x_2, \ldots)$ with norm

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Definition 1. *Let S be some group of isomorphisms $s : \ell_1 \to \ell_1$. A function f on ℓ_1 is called S-symmetric if $f(s(x)) = f(x)$ for every $s \in S$ and $x \in \ell_1$.*

Let $n \in \mathbb{N}$. Let $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a bijection. Let $b_\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be defined by

$$b_\sigma(k) = n\sigma(q) + r,$$

where q and r are the quotient and the remainder of the division of k by n resp. In other words, b_σ permutes "blocks" $\{1, 2, \ldots, n\}, \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}, \ldots$ of the length n. For example, let σ be defined by

$$\sigma(j) = \begin{cases} 2 & \text{if } j = 1, \\ 1 & \text{if } j = 2, \\ j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $b_\sigma\big(\{1, 2, \ldots, n\}\big) = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, $b_\sigma\big(\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}\big) = \{1, 2, \ldots, n\}$ and $b_\sigma(j) = j$ for $j > 2n$.

Let

$$B_n = \{b_\sigma : \ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ is a bijection}\}.$$

Let $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be some fixed bijection. Let

$$B_{n,\tau} = \{\tau^{-1} \circ b \circ \tau : \ b \in B_n\}.$$

For every bijection $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, let $s_a : \ell_1 \to \ell_1$ be defined by

$$s_a((x_1, x_2, \ldots)) = \big(x_{a(1)}, x_{a(2)}, \ldots\big).$$

Let

$$S_{n,\tau} = \{s_a : \ a \in B_{n,\tau}\}$$

If τ is the identical bijection, $S_{n,\tau}$-symmetric functions on ℓ_1 are called block-symmetric. We call a function f on ℓ_1 weakly block-symmetric if there exist $n \in \mathbb{N}$ and a bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that f is $S_{n,\tau}$-symmetric. Evidently, sets of weakly block-symmetric functions are unions of respective $S_{n,\tau}$-symmetric functions.

We investigate algebras of weakly block-symmetric polynomials on ℓ_1.

e-mail: mvarvaryuk97@gmail.com, taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua

On algebras of analytic functions, generated by countable sets of polynomials on some Banach spaces

Svitlana Vasylyshyn

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let us denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers. We also denote by ℓ_∞ the complex Banach space of all bounded sequences of complex numbers $z = \{z_n\}_{n=1}^\infty$ with norm $\|z\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$, and by $L_\infty[0,1]$ the complex Banach space of all Lebesgue measurable essentially bounded functions $y : [0,1] \to \mathbb{C}$ with norm $\|y\|_\infty = ess\,sup_{t\in[0,1]}|y(t)|$.

Let X be a complex Banach space of sequences of complex numbers such that the coordinate functionals on X are continuous. Let

$$\mathbf{P} = \left\{P_{11}, \ldots, P_{1m_1}, P_{21}, \ldots, P_{2m_2}, \ldots, P_{n1}, \ldots, P_{nm_n}, \ldots\right\}$$

be the sequence of complex-valued polynomials on the space X defined by the formulas

$$P_{11}(x) = x_1, \ldots, P_{1m_1}(x) = x_{m_1}, \ldots, P_{n1}(x) = x^n_{m_{n-1}+1}, \ldots, P_{nm_n}(x) = x^n_{m_n}, \ldots$$

for every sequence $x = \{x_1, \ldots, x_{m_1}, \ldots, x_{m_n}, \ldots\} \in X$, where $m_n \in \mathbb{N}$ and $m_n < m_{n+1}$ for every $n \in \mathbb{N}$. It is clear that the polynomials from the sequence $\mathbf{P}$ are continuous and algebraically independent. Let us denote by $P_{\mathbf{P}}(X)$ the algebra of all polynomials which are algebraic combinations of elements of the set $\mathbf{P}$. We denote by $H_b(X)$ the Fréchet algebra of all complex-valued entire functions of bounded type (that is, functions which are bounded on bounded sets) on the space X, endowed with the topology of uniform convergence on bounded sets of the space X. Let us denote by $H_{b\mathbf{P}}(X)$ the closure of the algebra $P_{\mathbf{P}}(X)$ in the metric of the algebra $H_b(X)$.

We prove some properties of the algebra $H_{b\mathbf{P}}(X)$. We also consider the particular case of the algebra $H_{b\mathbf{P}}(X)$ when $X = \ell_\infty$ and when in the role of the sequence of polynomials $\mathbf{P}$ we consider a sequence of polynomials

$$\mathcal{I} = \{I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}, I_{23}, \ldots, I_{n1}, I_{n2}, \ldots, I_{n,n+1}, \ldots\}$$

on the space ℓ_∞, such that the polynomials from the sequence $\mathcal{I}$ are defined by the formula

$$I_{n,k+1}(z) = z^n_{\frac{(n+2)(n-1)}{2}+(k+1)}$$

for every sequence $z = \{z_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, where $n, k \in \mathbb{N}$ and $k = \overline{0,n}$. We prove some properties of the algebra $H_{b\mathcal{I}}(\ell_\infty)$. We also prove that there exists a topological isomorphism between the algebra $H_{b\mathcal{I}}(\ell_\infty)$ and the Fréchet algebra of all entire symmetric functions of bounded type on the Cartesian product of the space $L_\infty[0,1]$, endowed with the topology of uniform convergence on bounded sets.

e-mail: sv.halushchak@gmail.com

Plastic pairs of metric spaces

Olesia Zavarzina
V.N.Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

Definition 1. A metric space (M, d) is called *expand-contract plastic* (briefly EC-plastic) if every non-expansive bijection $F\colon M \to M$ is an isometry.

Definition 2. *A metric space (M, d) is said to be* strongly plastic *if for every mapping $F : M \to M$ the existence of points $x, y \in M$ with $d(F(x), F(y)) > d(x, y)$ implies the existence of $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in M$ for which $d(F(\widetilde{x}), F(\widetilde{y})) < d(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.*

These definitions may be extended to the case of two different metric spaces. The talk is devoted to results concerning plasticity and strong plasticity obtained for pairs of two different totally bounded metric spaces.

e-mail: olesia.zavarzina@yahoo.com